LA MAGIA DE LAS PERMUTACIONES

Antonio Aranda Plata[1]
Estalmat - *Andalucía*

RESUMEN

El trabajo que se presenta ha sido desarrollado durante los cursos 2007-08 y 2008-09, con actividades preparadas para la ocasión, en sesiones del Proyecto ESTALMAT-*Andalucía* para alumnos que ya habían cursado los dos años del mismo (Veteranos). Algunas de las actividades que se ven aquí han sido expuestas también en numerosas ocasiones en charlas de divulgación de las Matemáticas y en Olimpiadas Matemáticas.

El objetivo es hacer una presentación amena y motivadora de las Permutaciones como *funciones* que actúan sobre un conjunto finito. Se plantean, a modo de juegos, algunos problemas de resultado impactante y se reta a su solución. Para ello, se analizan la definición de *permutación*, la descomposición en ciclos, la composición (producto) y sus propiedades, para concluir probando los ejemplos que se presentan.

Este tipo de actividades, en Educación Secundaria, están especialmente indicadas para alumnos a los que se les ha detectado un especial interés y gusto por las Matemáticas y podrían desarrollarse en un Taller de Resolución de Problemas de Matemáticas.

---

[1] Las sesiones fueron desarrolladas en colaboración con Luis Narváez, Miguel Ángel Olalla y Ramón Piedra, del Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla.

1. INTRODUCCIÓN

La comunicación gira en torno a dos problemas: el primero es el juego de las 9 cartas que, partiendo de una posición ordenada, se separan varias veces para que, al final, resulten todas sorprendentemente ordenadas de nuevo.

El segundo problema presenta la estrategia que deben seguir 100 presos para optimizar una oportunidad de libertad que se les ofrece.

Para comenzar se plantea el juego de magia de las 9 cartas numeradas del 1 al 9. Empezamos con ellas ordenadas como se ve en la figura 1.

Figura 1

Ahora las separamos colocándolas alternativamente en dos montones boca abajo. Después montamos uno sobre otro y "cortamos" todas las veces que queramos y por donde queramos ("cortar" es pasar unas cuantas cartas de arriba a abajo sin desordenarlas ni mezclarlas).

Después de hacer esto un par de veces las cartas quedan bastante desordenadas, como puede verse en la figura 2.

Figura 2

Pero, para quedarnos más seguros del desorden, vamos a separarlas una tercera vez y, por supuesto, "cortar" cuantas veces queramos.

Ahora miramos la carta de arriba

Figura 3

y pasamos de arriba a abajo tantas cartas como indique el número (en el ejemplo, 4). Entonces, enseñamos las cartas y **¡TODO ESTÁ ORDENADO COMO AL PRINCIPIO!**

¿Qué es lo que ocurre? ¿Dónde está la magia?

Lo que hemos visto es un juego de "magia" que no tiene ningún "truco". Es álgebra y nada más que álgebra lo que hay detrás de este juego. En las siguientes secciones vamos a profundizar en el modelo algebraico que nos va a permitir descubrir por qué se ordenan las cartas: **"El grupo de las permutaciones"**.

2. EL GRUPO DE LAS PERMUTACIONES

2.1.- <u>Permutaciones</u>.- El Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua dice que *permutar* significa *variar la disposición u orden en que estaban dos o más cosas* (tercera acepción).

Y en eso consiste una *permutación* en el sentido algebraico. Si tenemos los números 1 2 3 4 y los cambiamos de lugar nos resulta, por ejemplo, 3 4 2 1. Esto es una permutación de los números 1 2 3 4.

2.2.- <u>Ejemplo</u>.- Las permutaciones de los números 1 2 3 4 son:

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Para estar seguros de haber escrito todas hemos utilizado un criterio de escritura: considerar cada una como las cifras decimales de un número y seguir el orden natural.

2.3.- <u>Notaciones</u>.- Recordando la definición del DRAE, observamos que, en realidad, una permutación, por ejemplo, la 3 4 2 1, es '*algo'* que '*cambia el orden*' de los números 1 2 3 4, es decir, '*actúa*' sobre ellos de la siguiente manera: coloca en la posición 1 un 3, en la 2 un 4, en la 3 un 2 y en la 4 un 1. Esto se puede escribir simbólicamente colocando en la primera fila las posiciones y en la segunda los números que ocupan cada posición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

o también así:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & 3 \\ 2 & \to & 4 \\ 3 & \to & 2 \\ 4 & \to & 1 \end{array}$$

2.4.- <u>Ejercicio</u>.- Proponemos tratar de escribir con esta última notación algunas de las permutaciones de las obtenidas en el ejemplo anterior. ¿Hay alguna en la que <u>algún</u> número no cambia de posición? ¿Hay alguna en la que <u>ningún</u> número cambia de posición?

2.5.- <u>Ejercicio</u>.- Como las permutaciones son como "*funciones*" que actúan sobre los números 1, 2, 3, 4, podemos representarlas por letras como las funciones: *f, g, h*. Por ejemplo, supongamos las permutaciones

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular: $f(2)=$, $f(4)=$, $g(1)=$ y $g(3)=$

¿Tienen solución las "*ecuaciones*" $f(x)=x$ y $g(x)=x$?

2.6.- <u>Ciclos</u>.- En Matemáticas se es bastante ahorrativo y gusta escribir las cosas de la manera más simple que sea posible. Pero, para ello, hay que usar códigos de escritura que entendamos todos. Veamos cómo se puede hacer con las permutaciones:

La permutación anterior, 3 4 2 1, que se podía poner también como

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 3 \\ 2 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \rightarrow & 2 \\ 4 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

podemos escribirla así: (1 3 2 4) **[**ATENCIÓN: los números están entre paréntesis, a diferencia de como escribíamos la permutación en la forma inicial**]**, que quiere decir que a la posición 1 se le asigna el 3, a la 3 el 2, a la 2 el 4 y a la 4 el 1, es decir, a cada número se le asigna el siguiente y al último el primero.

A este tipo de permutaciones se les llama *"ciclos"*, porque da lo mismo escribir (1 3 2 4) =
(3 2 4 1) = (2 4 1 3) = (4 1 3 2). Pero ¡cuidado! No toda permutación es un *ciclo*. Vamos a verlo en los ejemplos siguientes.

2.7.- <u>Ejemplo</u>.- Escribir en forma de ciclo la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv$$

En este caso la solución es (1 2 4). <u>No está</u> el 3 porque el 3 <u>no cambia de posición</u>.

NOTA.- En el nuevo código hay que '*convenir*' que si un número no aparece es que no cambia su posición.

2.8.- <u>Ejemplo</u>.- ¿Se puede escribir en forma de ciclo esta permutación?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta permutación contiene dos ciclos: el (1 3) y el (2 4), y por tanto no es un ciclo. Observamos aquí que, a veces, se necesita más de un ciclo para determinar una permutación. En estos casos se dice que la permutación contiene varios *ciclos*, que necesariamente han de ser *disjuntos*. ¿Por qué?

2.9.- <u>Ejercicio</u>.- El conjunto de todas las permutaciones de los números 1 2 3… n se designa por $\mathbf{S_n}$. El conjunto que hemos estado manejando es $\mathbf{S_4}$. ¿Cuántos elementos tiene?
La solución ya la tenemos porque hemos escrito todas las permutaciones de $\mathbf{S_4}$**,** pero podemos ahora buscar una expresión que nos dé el número de permutaciones de *n* elementos.[2]

Vamos a ver ahora ejemplos de $\mathbf{S_6}$. Según lo anterior, ¿cuántas permutaciones hay en $\mathbf{S_6}$?

2.10.- <u>Ejercicios</u>.-

1. Escribir los *ciclos disjuntos* contenidos en cada una de las siguientes permutaciones de $\mathbf{S_6}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \equiv \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \equiv \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \equiv$$

2. Completar las igualdades en los siguientes casos:

$$(1\ 4)\ (2\ 3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix} \quad ; \quad (1) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

$$(2\ 3\ 1)\ (5\ 6) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix} \quad ; \quad (1\ 4)\ (2\ 5)\ (3\ 6) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

$$(1\ 4\ 5\ 2\ 6\ 3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix} \quad ; \quad (1\ 4\ 5)\ (2\ 6\ 3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

2.11.- <u>Teorema</u>.- Toda permutación está unívocamente determinada por los *ciclos disjuntos* que contiene.

Podemos llegar a esbozar una demostración del Teorema, intentando, por ejemplo, hacerlo en el caso de $\mathbf{S_6}$.

2.12.- <u>Composición de permutaciones</u>.- Si consideramos dos permutaciones, *f* y *g*, y nos imaginamos que primero "*actúa*" *f* y después, sobre el resultado que se obtiene, "*actúa*" *g*, resulta otra permutación que llamamos "*compuesta* de *f* y *g*" y se representa por *fg*. Por ejemplo, recordemos las permutaciones de antes:

---

[2] Dependiendo del nivel, esta expresión puede ser conocida por los alumnos o puede intentarse ahora la obtención de la misma.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(1)=3$ y $g(3)=3$, entonces $fg(1)=3$

$f(2)=4$ y $g(4)=1$, entonces $fg(2)=1$

$f(3)=2$ y $g(2)=2$, entonces $fg(3)=2$

$f(4)=1$ y $g(1)=4$, entonces $fg(4)=4$

Podemos entonces escribir:

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Otra forma de expresarlo es así:

$1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 3$ $2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} 1$ $3 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 2$ $4 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 4$	de donde,	$1 \xrightarrow{fg} 3$ $2 \xrightarrow{fg} 1$ $3 \xrightarrow{fg} 2$ $4 \xrightarrow{fg} 4$

Simbólicamente se escribe: $(fg)(i)=g(f(i))$, i= 1, 2, 3, 4.

2.13.- <u>Ejercicio</u>.- Hallar la permutación *gf*, es decir, actuando primero *g* y después *f*, o, simbólicamente, $(gf)(i)=f(g(i))$.

¿Da lo mismo? ¿Qué quiere decir esto?

2.14.- <u>Notas.</u>-

1.- La composición de permutaciones **no** es conmutativa: en general, $fg \neq gf$.
2.- En el lenguaje algebraico la expresión *fg* nos recuerda un producto. Por eso, la composición de permutaciones se llama también *producto de permutaciones*.
3.- Sabemos que una permutación está determinada por sus *ciclos disjuntos*. De hecho, ella misma es el *producto de dichos ciclos*. Así pues, el teorema anterior diría: toda permutación se puede escribir como *producto de ciclos disjuntos* y, además, <u>de manera única</u>, salvo el orden (esto quiere decir que en los *ciclos disjuntos* **sí** puede cambiarse el orden).

2.15.- <u>Ejercicio</u>.- Se consideran en $\mathbf{S_6}$ los siguientes productos de ciclos <u>no disjuntos</u>:

f = (1 6) (1 4) (3 5) , g = (1 2 4 5) (2 6 3 1) y h = (2 6 3 1) (1 2 4 5)

Expresar las permutaciones *f, g, h* como producto de *ciclos disjuntos*.

Observar que las permutaciones *g* y *h* tienen <u>los mismos ciclos</u>, <u>pero no son disjuntos</u>, por eso, al cambiarlos de orden, dan permutaciones distintas.

2.16.- <u>Ejercicio</u>.- Hallar los siguientes productos, siendo *f* , *g* , *h* las permutaciones del ejercicio anterior:

fg , gf , gh , $h^2 = hh$, fgh , fh^2 , $h^3 = hhh$.

3. EXPLICACIÓN DEL JUEGO INICIAL

3.1.- Separación en montones.-

La separación en dos montones equivale a la permutación:

$S=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, que, en forma de ciclo, es: $S=(1\ 8\ 3\ 4\ 2\ 6\ 7\ 5\ 9)$.

Volver a separar las cartas es hacer la misma permutación otra vez:

$SS=S^2=(1\ 3\ 2\ 7\ 9\ 8\ 4\ 6\ 5)$; $S^3=(1\ 4\ 7)(2\ 5\ 8)(3\ 6\ 9)$; ...

3.2.- Cortar una carta.-

Cortar una carta equivale a la permutación:

$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, que, en forma de ciclo, es: $C=(1\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$.

$$\text{Cortar dos cartas} = (\text{cortar una carta})^2=C^2=(1\ 8\ 6\ 4\ 2\ 9\ 7\ 5\ 3)$$

$$\text{Cortar tres cartas} = (\text{cortar una carta})^3=C^3=(1\ 7\ 4)(2\ 8\ 5)(3\ 9\ 6)$$

$$C^4= (C^2)^2=(1\ 6\ 2\ 7\ 3\ 8\ 4\ 9\ 5)$$

$$C^6= (C^3)^2=(1\ 4\ 7)(2\ 5\ 8)(3\ 6\ 9)$$

Primer hechizo mágico

$$\mathbf{S^3 = C^6}$$

3.3.- El orden de los factores SÍ altera el producto:

$SC=(1\ 8\ 3\ 4\ 2\ 6\ 7\ 5\ 9)(1\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)=(1\ 7\ 4)(2\ 5\ 8)$.

$CS=(1\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)(1\ 8\ 3\ 4\ 2\ 6\ 7\ 5\ 9)=(2\ 8\ 5)(3\ 6\ 9)$.

Si calculamos C^4S, resulta:

$C^4S=(1\ 6\ 2\ 7\ 3\ 8\ 4\ 9\ 5)(1\ 8\ 3\ 4\ 2\ 6\ 7\ 5\ 9)=(1\ 7\ 4)(2\ 5\ 8)$

Segundo hechizo mágico

$$\mathbf{SC = C^4S}$$

Por lo tanto:

$SC^2=(SC)C=(C^4S)C=C^4(SC)=C^4C^4S=C^8S$

$SC^3=(SC^2)C=(C^8S)C=C^8(SC)=C^8C^4S=C^{12}S= C^3S$

$SC^4=(SC^3)C=(C^3S)C=C^3(SC)=C^3C^4S=C^7S$

$SC^5= \dots =C^2S$

$SC^6= \dots =C^6S$

$SC^7 = \ldots = CS$

$SC^8 = \ldots = C^5 S$

3.4.- Explicación del juego

Lo que hacemos en el juego es separar las cartas, cortar varias veces, separar otra vez las cartas, cortar varias veces y separar por tercera vez las cartas y cortar varias veces. Esto es:

$$(SC^{p})(SC^{q})(SC^{r}) = (C^{p'} S)\ (C^{q'} S)\ (C^{r'} S) = C^{p'} (S\ C^{q'})\ (S\ C^{r'})\ S = C^{p'} (C^{q''} S)\ (C^{r''} S)\ S =$$

$$= C^{p'} C^{q''} (S\ C^{r''})\ S^2 = C^{p'} C^{q''} C^{r'''} S^3 = C^{p'} C^{q''} C^{r'''} C^6 = C^{p'+q''+r'''+6}$$

¡Al final lo que queda es un simple corte!

4. CÓMO PUEDEN LAS PERMUTACIONES AYUDAR A LOS PRESOS

En una cárcel hay 100 presos numerados del 1 al 100, a los que el alcaide de la prisión quiere dar una oportunidad de ser liberados. Para ello les propone el siguiente juego:

a) Se colocan 100 cajas numeradas en una habitación, conteniendo en su interior los números del 1 al 100, distribuidos aleatoriamente.

b) Uno a uno, cada preso entrará en la habitación y podrá abrir hasta 50 cajas elegidas por él, mirando el número que hay en cada una de ellas.

c) Si **todos** los presos consiguen encontrar su propio número entre las cajas elegidas, habrán ganado el juego y todos los presos serán liberados.

d) Si **alguno** de los presos no consigue encontrar su propio número, **todos** habrán perdido el juego y quedarán en la cárcel.

Nota.- Los presos no pueden comunicarse entre sí mientras dura el juego.

Si los presos eligen las cajas al azar, la probabilidad de que un preso acierte a ver su número es: $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la probabilidad de que se liberen todos los presos es: $\frac{1}{2^{100}} \approx 0.0000000000000000000000000000008$, que es prácticamente CERO.

4.1.- Problema.- ¿Existe alguna estrategia que aumente notablemente la probabilidad de que todos los presos sean liberados?

4.2.- Solución.- Supongamos que los presos acuerdan previamente la siguiente manera de elegir las cajas:

CRITERIO DE ELECCIÓN.- Cada preso tiene un número N. Cuando entra en la habitación mira en primer lugar el número que hay en la caja N. A continuación irá a mirar la caja que le indique el número encontrado y así sucesivamente.

¿Cuál será, de esta manera, la probabilidad de salir todos de la cárcel?

La distribución de los números en las cajas es una permutación de los números 1, 2, 3, ... 99, 100. Para entender bien la estrategia de los presos vamos a hacerlo con seis números: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Cada preso puede mirar, como máximo, tres cajas.

a) Supongamos, por ejemplo, que la distribución de los números en las cajas es 3 6 5 2 1 4, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

o, en forma de ciclo, (1 3 5) (2 6 4).

¿Se liberarían los presos en este caso usando la estrategia acordada?

El preso nº 1 mira en la caja **1** y ve un 3.
Va a la caja **3** y ve un 5.
Va a la caja **5** y ve un 1: SE LIBRA.

El preso nº 2 mira en la caja **2** y ve un 6.
Va a la caja **6** y ve un 4
Va a la caja **4** y ve un 2: SE LIBRA.
Y ASÍ, TODOS LOS PRESOS SE LIBRAN.

b) ¿Y si la distribución fuera 2 1 6 5 3 4?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

o, en forma de ciclo, (1 2) (3 6 4 5).

El preso nº 1 mira en la caja **1** y ve un 2.
Va a la caja **2** y ve un 1: SE LIBRA.

El preso nº 2 mira en la caja **2** y ve un 1.
Va a la caja **1** y ve un 2: SE LIBRA.

El preso nº 3 mira en la caja **3** y ve un 6.
Va a la caja **6** y ve un 4.
Va a la caja **4** y ve un 5.

AGOTADAS SUS TRES CAJAS, QUEDA PRESO
Y TAMBIÉN TODOS LOS DEMÁS.

La clave del problema está en observar que los presos se liberarán si la permutación de los números en las cajas no contiene un ciclo de orden mayor que tres. Porque si hay un ciclo de orden mayor que tres, el preso que tenga uno de sus números no llegará a ver su número en tres movimientos.

4.3.- Cálculo de las probabilidades.- La probabilidad de liberarse los seis presos eligiendo las cajas al azar es:

$$\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0{,}015625 = 1{,}56\%$$

¿Cuál es la probabilidad de ser liberados utilizando la estrategia acordada?

Hay 720 permutaciones posibles con seis números. Si las escribimos en forma de ciclos, tenemos que contar cuántas hay que tengan un ciclo (y sólo uno, obviamente) de orden **mayor que 3**, porque esas son las que **no permiten** que los presos se liberen.

Ciclos de orden 4: $\binom{6}{4} \cdot 3! \cdot 2! = 180$

Ciclos de orden 5: $\binom{6}{5} \cdot 4! \cdot 1! = 144$

Ciclos de orden 6: $\binom{6}{6} \cdot 5! \cdot 0! = 120$

Hay 444. Entonces, los casos favorables serán 720 – 444 =276 y la probabilidad es:

$$p = \frac{276}{720} = 0{,}383333... = 38{,}33\%$$

<u>4.4.- Caso general</u>.- Supongamos que hay *2n* presos. El problema consiste en hallar el número de permutaciones de $\mathbf{S_{2n}}$ que contienen un ciclo de orden mayor que *n* (obviamente sólo pueden contener <u>uno</u>).

Si $k>n$, ¿cuántas permutaciones hay que contengan un ciclo cuyo orden sea exactamente *k*?

Hay $\binom{2n}{k}$ maneras de elegir *k* números y $(k-1)!$ formas de ordenar estos números cíclicamente. Y, para cada una de estas ordenaciones, hay $(2n-k)!$ maneras de escribir el resto. Entonces, el número de permutaciones que contienen exactamente un ciclo de orden *k* es:

$$\boxed{\binom{2n}{k}(k-1)!\ (2n-k)! = \frac{(2n)!}{k}}$$

Y, por lo tanto, la probabilidad de que una permutación elegida al azar tenga exactamente un ciclo de orden *k* es: $\frac{1}{k}$.

De aquí obtenemos que la probabilidad de que una permutación <u>no</u> contenga un ciclo de orden *k* es:

$$\boxed{p = 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots - \frac{1}{2n} = 1 - H_{2n} + H_n}$$

donde $H_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$. Esta suma aproxima el valor de $\ln m$, por lo tanto,

$$\boxed{p \approx 1 - \ln 2n + \ln n = 1 - \ln 2 \approx 0{,}3068528 = 30{,}68528\%}$$

De hecho, siempre es un poco mayor, decreciendo a medida que crece *n*.

Para el caso reducido que hemos visto, $n=3$, la probabilidad es:

$$\boxed{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{23}{60} = 0{,}388888\ldots}$$

Para 10 presos, $n=5$, la probabilidad de que se salven es:

$$\boxed{p = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 0{,}354365\ldots}$$

Para 100 presos, es decir, para $n=50$, la probabilidad de que se salven es:

.

$$\boxed{p = 0{,}311827821}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEGRÍA, P. (2004). "*Orden del Universo*", Divulgamat. Cultura y Matemáticas. El Rincón Matemágico.http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/MateMagia/matemagia.asp

WINKLER, P. (2006). *Seven puzzles you think you must no have heard correctly*. "Seventh Gathering for Gardner". http://www.math.dartmouth.edu/~pw/solutions.pdf

XAMBÓ, S. DELGADO, F. y FUERTES, C. (1993) *"Introducción al Álgebra"*. Ed. Complutense.