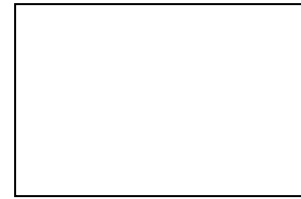


PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS
Estímulo del talento matemático



Prueba de selección
4 de junio de 2005

Nombre:.....
Apellidos:.....
Fecha de nacimiento:.....
Teléfonos:.....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

Queremos conocer no solamente tus soluciones, sino sobre todo tus propios caminos hacia la solución.

Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.

Al final nos debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas, deberías tratar de describirnoslas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones.

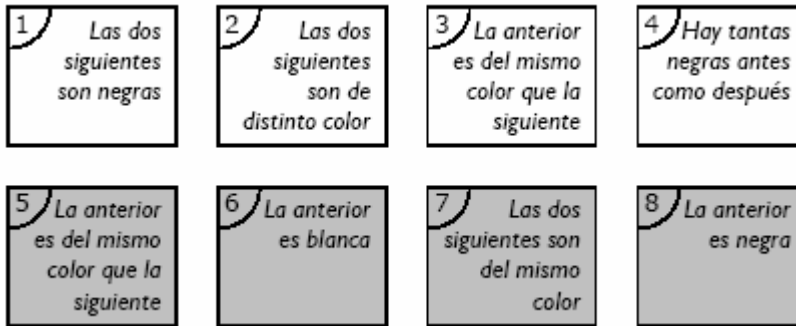
Tienes dos horas en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: máximo tiempo para un ejercicio 30 minutos.

Te deseamos mucho éxito.



Problema nº 1 (Tarjetas)

Las tarjetas 1, 2, 3 y 4 son blancas; las tarjetas 5, 6, 7 y 8 son negras.



El objetivo final es ordenarlas para que todas las frases resulten verdaderas. Pero antes contesta a las siguientes preguntas.

- a) ¿Qué tarjetas se pueden colocar en primer lugar?
- b) ¿Qué tarjetas se pueden colocar en último lugar?
- c) ¿En qué posiciones puede colocarse la tarjeta 4?
- d) Finalmente, ordena las tarjetas una detrás de otra para que todas las frases resulten verdaderas.

Problema nº 2 (Tablero)

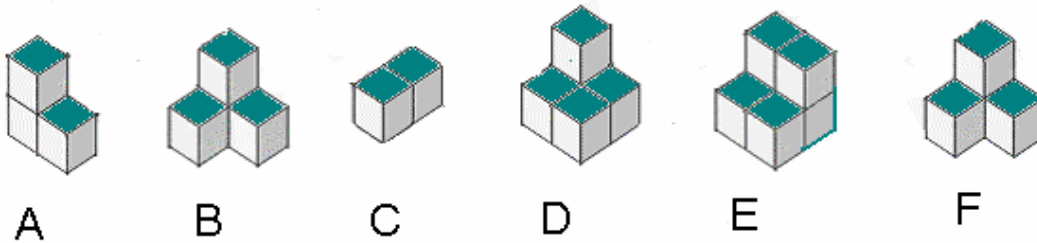
Tenemos un tablero cuadrado y en cada casilla anotamos un número de acuerdo con este criterio: el número que escribimos es el menor de los números que indican la fila y la columna de la casilla. La figura que ves a continuación te da un ejemplo para el caso de un tablero 3×3

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

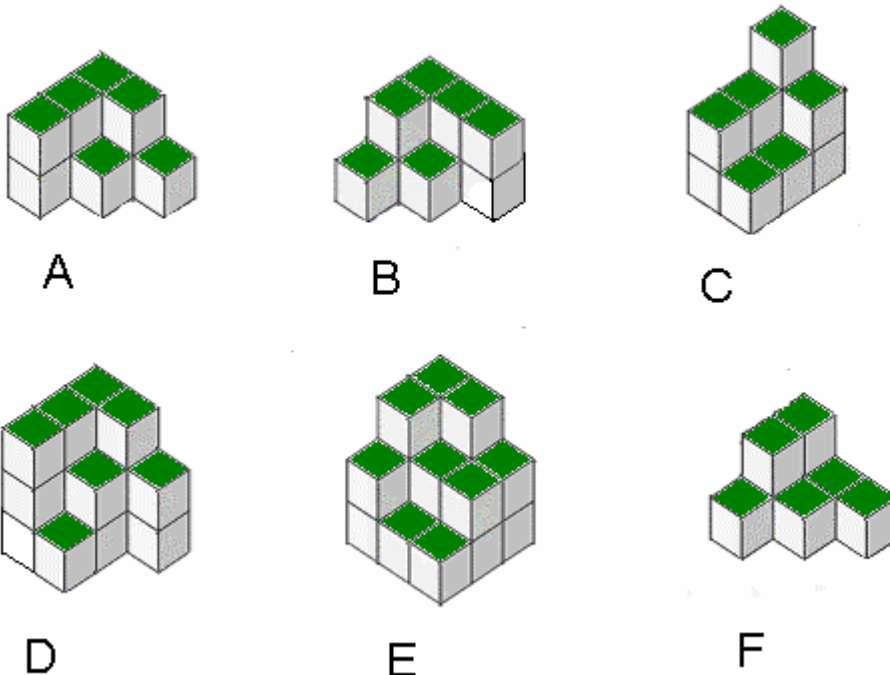
- A) Rellenamos un tablero cuadrado de 5×5 (25 casillas). ¿Cuál será la suma de todos los números escritos en las casillas? **Explica** una manera de calcular la suma anterior *sin necesidad de sumar uno a uno todos los números*.
- B) Ahora tenemos un tablero de 10×10 (100 casillas). Si lo rellenamos siguiendo las instrucciones ya comentadas, ¿cuál será la suma de todos los números anotados? Explica cómo lo has calculado.
- C) En el mismo tablero de 10×10 , estudia cuál sería la suma si, en lugar de poner el menor de los números que indican la fila y la columna de la casilla, pusiéramos el mayor.

Problema nº 3 (Cubos)

a) Observa las seis piezas siguientes. Empareja los bloques que encajen formando un cubo completo de $2 \times 2 \times 2$.

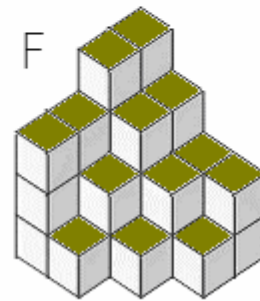
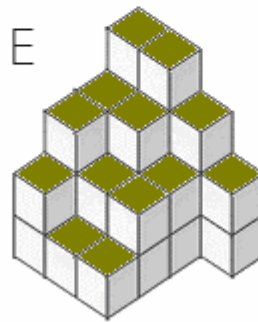
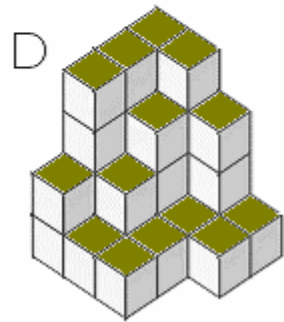
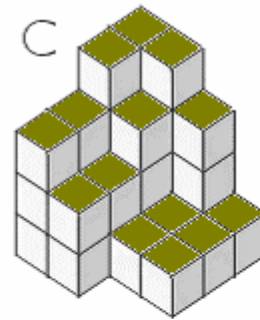
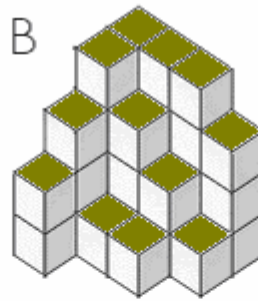
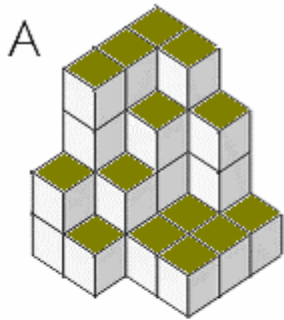


b) Cuenta el número de cubos que hay en cada uno de los siguientes bloques. ¿Cuáles son los dos bloques que hay que unir para formar un cubo completo de $3 \times 3 \times 3$? En cada uno de ellos, numera con 1, 2 y 3, tres cuadrados que queden pegados al encajar los bloques. Explica cómo has encontrado la solución.



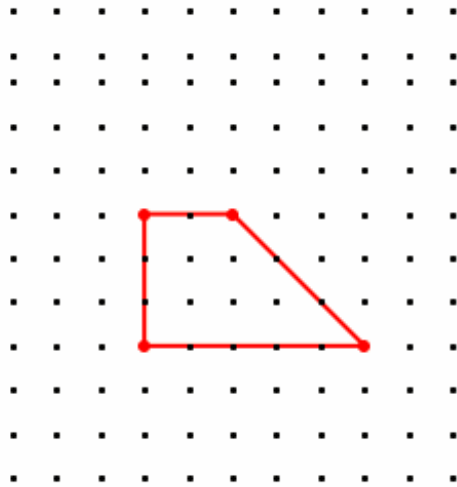
(Sigue a la vuelta)

c) Contesta a las mismas preguntas que en el apartado b) para los bloques siguientes en el caso de un cubo completo de 4x4x4. No te olvides de explicar cómo has encontrado la solución.



Problema n° 4 (Números trapeciales)

En este problema consideraremos unos trapecios muy especiales. Tienen que tener dos ángulos rectos y un **ángulo de 45°** y además sus vértices han de ser puntos de una cuadrícula. Mira el trapecio de la figura: como encierra 18 puntos, contando los que hay sobre los lados, diremos que 18 es un “**número trapecial**”.



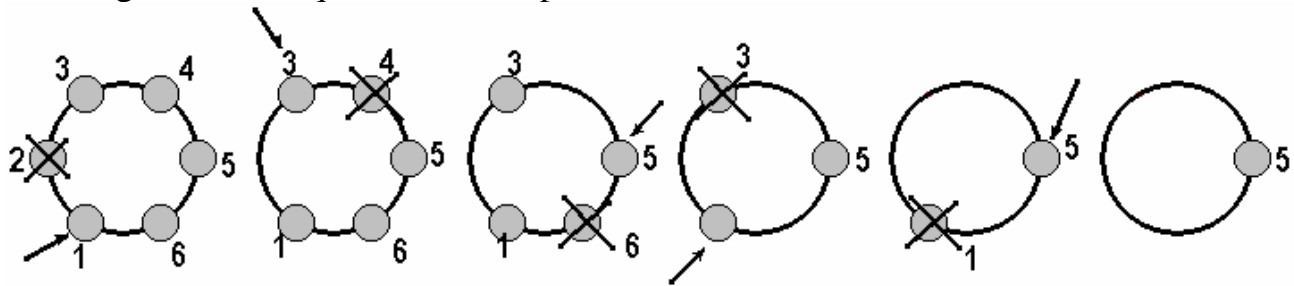
- a) Haz un dibujo que muestre que 35 es un número trapecial.
- b) Dibuja todos los trapecios que tiene 18 como número trapecial y justifica que no hay más que los que dibujas.
- c) Explica por qué cualquier número impar mayor que 3 es un número trapecial.
- d) Encuentra razonadamente todos los números entre 4 y 50 que **no** sean números trapeciales.

(aquí y detrás tienes cuadrículas para practicar)



Problema n° 5 (Fichas saltarinas)

Se colocan 6 fichas en círculo y se numeran del 1 al 6 consecutivamente. Ahora, en el sentido de numeración, voy dejando una ficha y quitando la siguiente. Empiezo dejando la ficha 1 y quitando la 2. El proceso continúa hasta que sólo queda una ficha. En la figura vemos que al final del proceso la ficha final es la número 5.



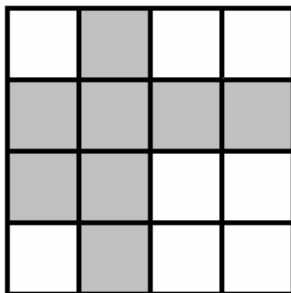
A. Haz tu lo mismo con $8=2^3=2 \times 2 \times 2$ fichas en círculo. ¿Qué ficha queda al final?

B. Si comenzamos con $16=2^4$ fichas, ¿Qué ficha queda al final?

C. Los números 8 y 16 son potencias de 2. También el número $1024 = 2^{10}$ es una potencia de 2. ¿Sabrías decirnos, con un razonamiento convincente, qué ficha quedaría al final si comienzas con un círculo de 1024 fichas?

D. Ahora tienes $1026 = 2^{10} + 2$ fichas. ¿Qué ficha quedaría al final? Indícanos las razones de tu contestación.

Problema nº 6 (Perímetro de bloques con recorrido de torre)



En un tablero cuadrado de 16 casillas dibujamos el bloque de **ocho casillas** de la figura cuya área es 200 cm^2 .

A. ¿Cuál es el perímetro del bloque?

B. Dibuja en el tablero otros dos bloques de **ocho casillas** con **recorrido de torre** (una ficha puede desplazarse por su interior desde una casilla a otra cualquiera con los movimientos de una torre de ajedrez -es decir con desplazamientos paralelos a los lados del tablero) y que tengan diferente perímetro del bloque propuesto.

C. Dibuja en el tablero un bloque de **ocho casillas** con **recorrido de torre**, que tenga el perímetro mayor posible. Explica porqué los otros bloques no pueden tener perímetro mayor.

D. Dibuja en el tablero un bloque de casillas con **recorrido de torre** que tenga el mayor perímetro posible. ¿Cuántas casillas debe tener?