TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA DEFORMANDO

Marco Castrillón López
Depto. Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid

Curso:
Detección y estímulo del taltento Matemático: Un proyecto para Cantabria UNICAN

Julio 2007

INTRODUCCIÓN

- Topología……… hija de las transformaciones de las Geometría de los siglos XVIII y XIX
- Surge con los trabajos sobre grafos de Leonardo Euler (1707-1783) en su libro Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentes.
- Geometria Situs (= Geometría del lugar), rebautizada posteriormente como Topología (de topo-logos en versión griega).
- La Topología surge como respuesta a cuestiones matemáticas que no dependen de las distancias ni las formas (cuestiones vitales en los problemas puramente geométricos) sino solamente de la disposición de los objetos en estudio.

- *Esta nueva manera de pensar resultó ser especialmente fructífera, y supuso un gran avance en la ciencia al poderse afrontar problemas complejos de manera eficiente.*
- *Más adelante, la Topología ofreció además una estructura básica de conjuntos cada vez más complejos (como por ejemplo, los espacios funcionales inspirados por los problemas de la Mecánica Cuántica).*
- *Se pretendía poder hablar de nociones como continuidad, convergencia, deformación, cuando el espacio en sí estaba desprovisto intuitivamente (o visualmente)*

La Topología en muchos de sus aspectos es indispensable para las Matemáticas, Física e incluso Ingeniería.

Hay muchas cuestiones en Topología de muy fácil exposición pues tratan con ideas sencillas pero, al mismo tiempo, muy profundas.

Se trata, por tanto de un buen material para estimular el talento matemático, especialmente el razonamiento espacial y la frontera entre geometría, combinatoria y lógica. La edad de 12-13 años es muy adecuada para fortalecer estos puntos.

GRAFOS

Grafo = Una noción antigua con una palabra nueva.

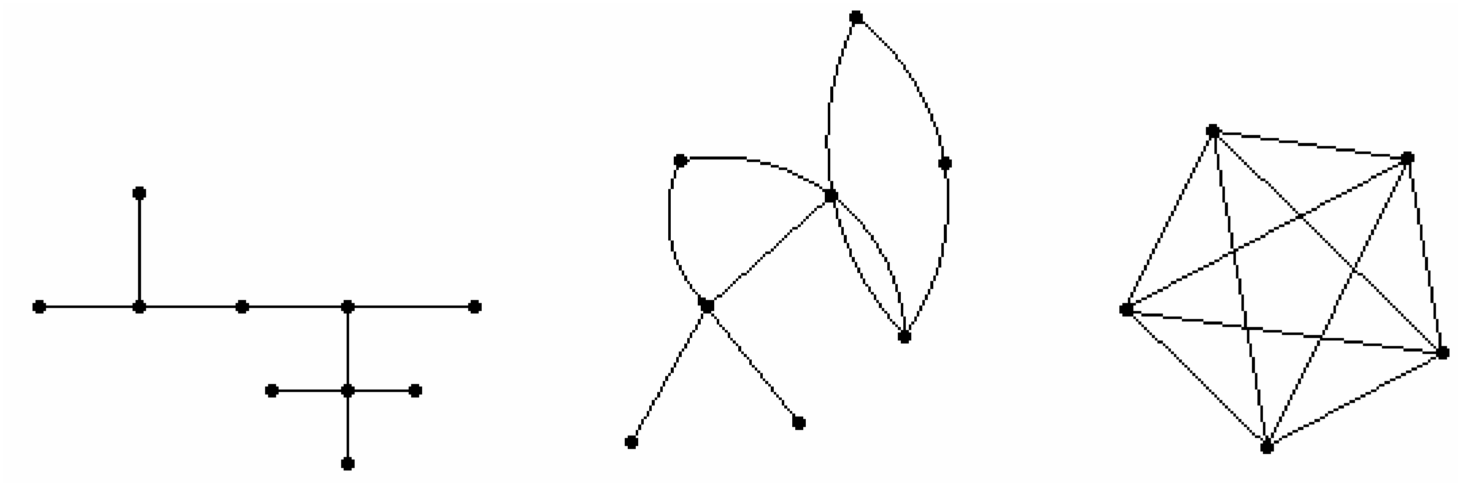
Sirven para modelizar problemas.

Un grafo es sencillamente un conjunto de puntos llamados **vértices** y ciertos segmentos llamados **aristas** o **arcos** uniendo pares de dichos puntos.

El número de vértices de un grafo se denomina **orden** del grafo.
Se llama **grado** de un vértice al número de aristas que salen (o entran, según como se entiendan) de dicho vértice.

Para cada n natural, se llama grafo completo de orden n (y se denota por C_n) al grafo formado pon n vértices tales que cada uno está conectado con cada uno de los otros vértices por una arista

Ejemplos:



UN PRIMER RESULTADO

Sean x_1, x_2,…,x_n los vértices de un grafo G y denotemos por $g(x_i)$ al grado del vértice x_i.

A menudo se está interesado en hallar en número de aristas de un grafo. Por supuesto que se pueden contar directamente, pero resulta más fácil contar el grado de cada vértice y sumarlos.

Entonces, cada arista se habrá contado dos veces, una por cada uno de sus extremos, de manera que el número de aristas es la mitad de esa suma; es decir,

$$\tfrac{1}{2}\{g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n)\}.$$

Consecuentemente, la suma $g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n)$ debe ser par.

Este resultado es conocido como el Lema del apretón de manos y se suele expresar diciendo que en cualquier fiesta el número total de apretones de manos es siempre par. Históricamente, este lema es el primer resultado sobre grafos.

Una consecuencia inmediata de este resultado es que el número de vértices con grado impar debe ser necesariamente par. Esto nos permite resolver algunos problemas simples:

► *En una ciudad hay 15 centralitas telefónicas. A fin de mejorar el servicio se quiere establecer uniones por cable entre ellas. ¿Se puede conectar cada una de estas centralitas exactamente a otras 5 de ellas?*

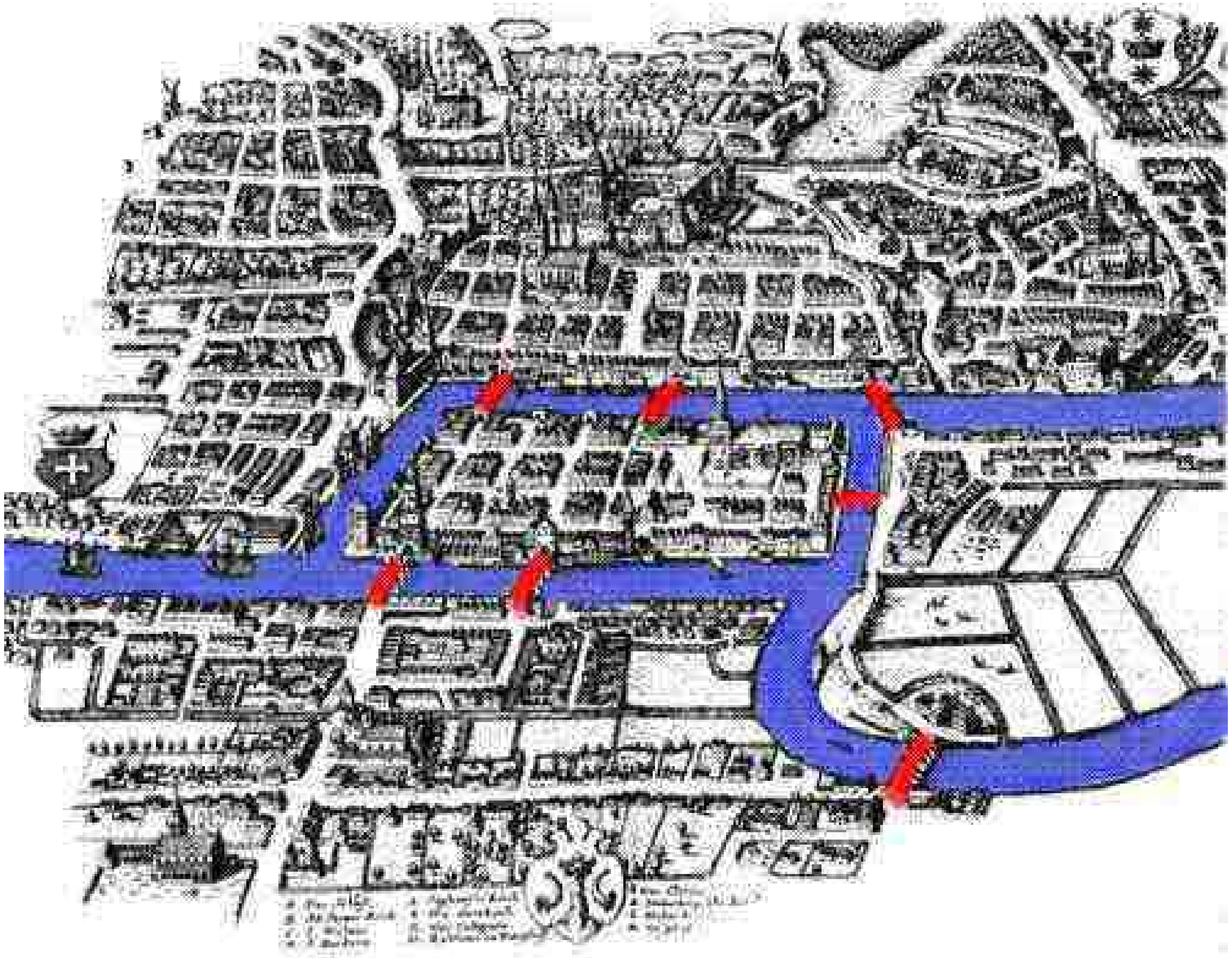
► *¿Se pueden dibujar 9 segmentos en una pizarra de tal manera que cada uno de ellos corte exactamente a otros tres?*

CAMINOS EULERIANOS

El primer problema serio resuelto a través de la Teoría de Grafos fue el problema de los puentes de Köningsberg (hoy Kaliningrado, Rusia).

Precisamente en el libro de Euler se afronta dicho problema.

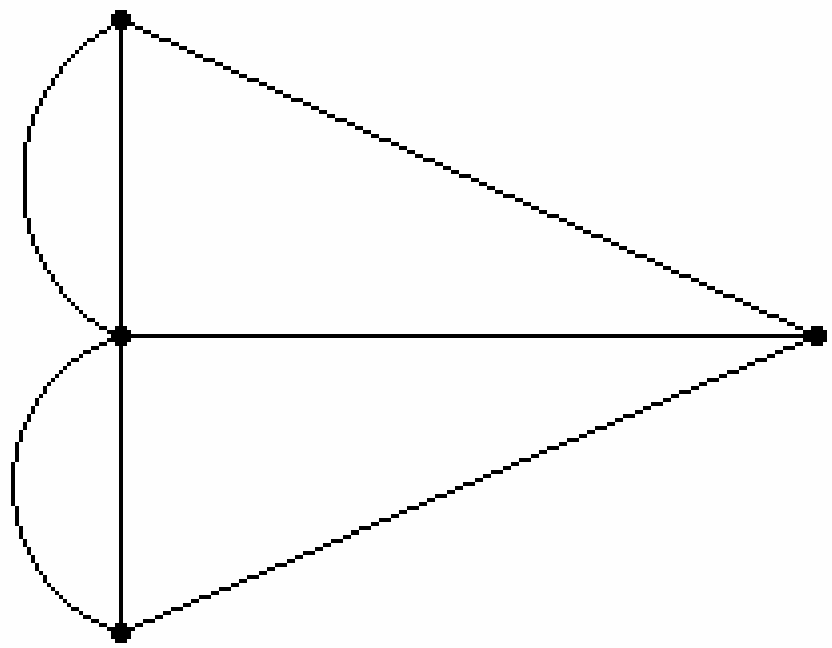
Esta ciudad es atravesada por el río Pregel y tiene una isla en medio, conectada al resto de la ciudad por puentes. Un mapa esquemático de la disposición de estos puentes es la siguiente:



Para los habitantes del lugar era tema de distracción el intentar descubrir un itinerario para sus paseos de forma que pudiesen cruzar por los siete puentes pero pasando por cada uno sólo una vez.

Estudiando el problema, Euler llegó a demostrar que es imposible encontrar dicho itinerario.

Para demostrarlo, lo primero que hay que hacer es reducir el problema a un esquema, esto es, hacer el grafo correspondiente a la situación estudiada. Como los puentes son los objetos interesantes (van a ser las aristas), las zonas de la ciudad pueden tener el tamaño que quieran así que podemos reducirlas a meros puntos:



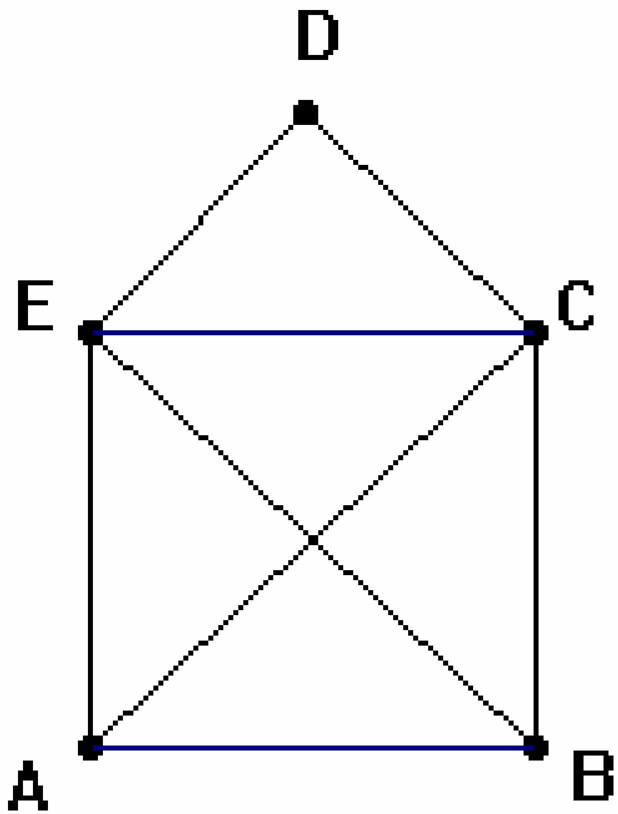
El Teorema de Euler en toda su generalidad afirma que:

Un grafo puede recorrerse pasando por todas sus aristas una y sólo una vez si y solamente si el grafo tiene dos o ningún vértice de grado impar.

Según este resultado, el grafo de Köningsberg efectivamente no puede realizarse al tener 4 vértices de grado impar.

Es fácil ver que la condición de Euler es necesaria. En efecto, tomemos por ejemplo el siguiente grafo con los vértices etiquetados con A, B, C, D, y E

La casita:


D
E
C
A
B

- *Si al realizar el recorrido, escribimos la letra correspondiente a cada vértice al entrar y al salir del mismo, obtenemos la sucesión*

  ACCDDEECCBBEEAAB.

- *Observamos que cada letra aparece tantas veces como el grado del vértice al que corresponde.*
- *Salvo la primera y la última, todas las letras aparecen por parejas, por lo que el grado de todos los vértices salvo dos de ellos es par.*
- *El caso en el que la letra final y la inicial coincidan, se tiene entonces que todos los vértices tienen grado impar, lo que termina la demostración.*

Ver que la condición de Euler es también suficiente es algo más laborioso y no vamos a abordarlo aquí.

GRAFOS PLANOS. LA FÓRMULA DE EULER

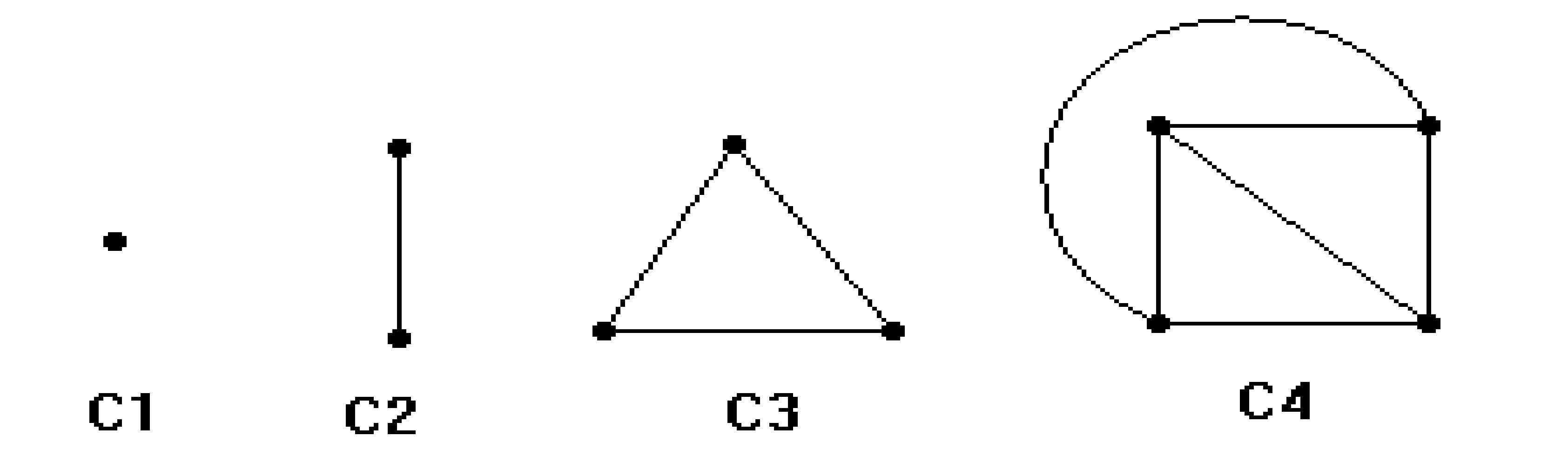
Cualquier grafo se puede dibujar en el espacio (es decir, en ^{3}) de tal manera que ninguna arista se corte con otra salvo en los vértices comunes.

Esto no siempre es posible en el plano, sólo algunos de ellos pueden dibujarse en ^{2} y consecuentemente son llamados grafos planos.

El saber si un grafo es o no es plano puede ser de gran importancia en el diseño de circuitos integrados, de carreteras, de ferrocarriles y en general en todos los casos en que el cruce de dos aristas represente una situación incómoda (o incluso cara).

Históricamente, hay dos ejemplos clásicos de grafos no planos:

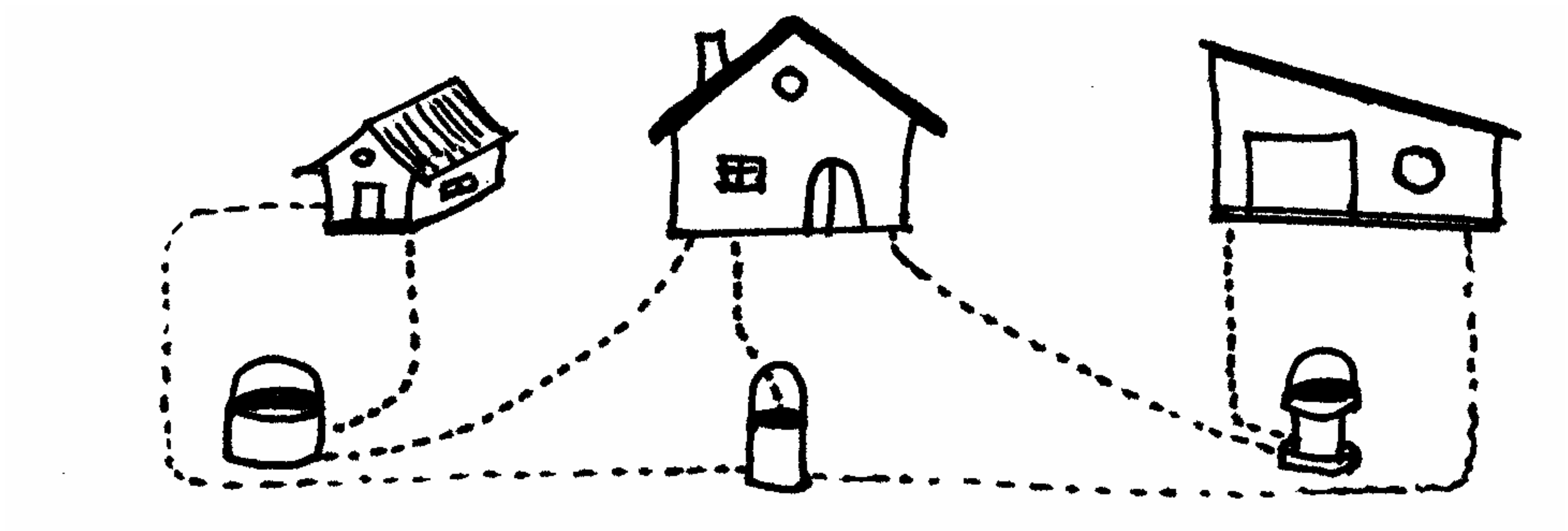
1. *El primero es el del grafo completo de orden 5. Para n=1, 2, 3 ó 4 el*



grafo completo C_n puede dibujarse en el plano:

Sin embargo para n=5, esto no es posible.

2. El otro ejemplo es el problema de las casas y los pozos. Dadas tres



casas y tres pozos es imposible conectar con caminos cada casa con cada pozo sin que se cruce alguno de estos caminos. Este grafo se denomina $C_{3,3}$.

Sin embargo lo relevante sobre la cuestión de los grafos planos es el siguiente Teorema demostrado por Kuratowski en 1930:

Un grafo es plano si y solamente si no contiene a C_5 o $C_{3,3}$ como subgrafos.

Es decir, los dos ejemplos anteriormente expuestos son básicamente los únicos casos no planos.

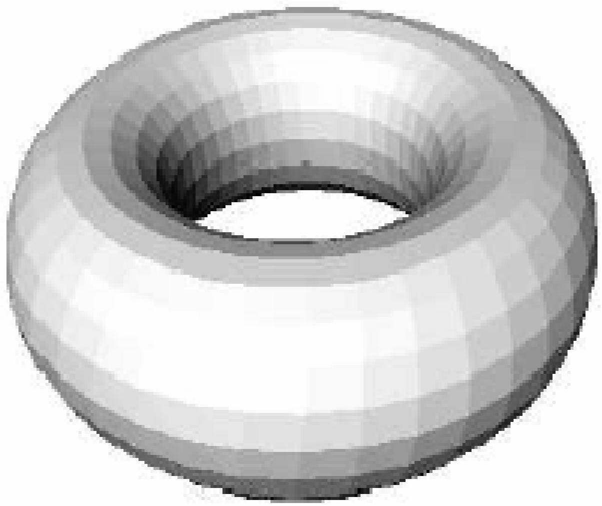
Una propiedad importante de los grafos planos es la fórmula de Euler. Dado un grafo dibujado en el plano, si denotamos por V el número de vértices, A el número de aristas y C el número de zonas en las que queda dividido el plano, se verifica entonces

$$C-A+V=2.$$

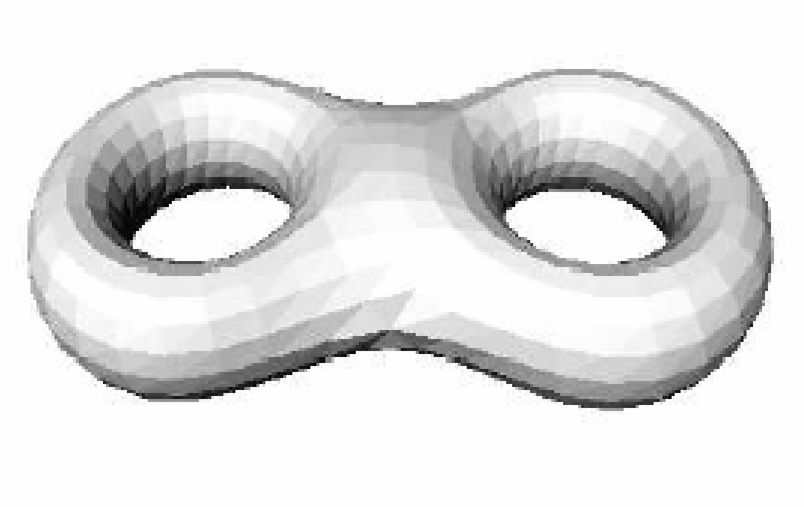
Esta fórmula resulta más familiar cuando se habla de poliedros en el espacio.
Es equivalente: cualquier poliedro se puede desarrollar en el plano dando lugar a un grafo plano. Sin embargo es más fácil probar la anterior fórmula para grafos.

Esta fórmula (y sus generalizaciones para espacios multidimensionales) ha resultado ser uno de los logros más importante de la Topología. Sus aplicaciones son innumerables.

Por ejemplo, si se tiene un poliedro modelado en un toro (una rosquilla) la fórmula se tendría que modificar a $C-A+V=0$

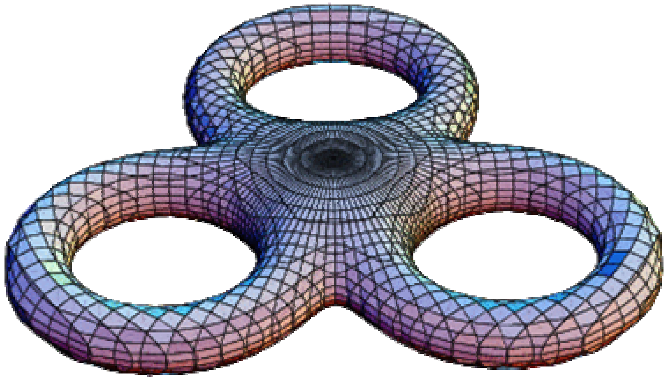


Para una superficie de tipo



La fórmula es $C\text{-}\mathcal{A}+\mathcal{V}= -2.$

Para poliedros modelados en



La fórmula es $C\text{-}A+V = -4$.

Para g agujeros, se tiene $C\text{-}A+V=2\text{-}2g$.

COLORACIÓN DE GRAFOS

Supongamos que el anfitrión de una fiesta quiere regalar a cada uno de sus invitados un ramo de rosas. Dos invitados pueden ser "amigos" o "desconocidos" entre ellos. Para quedar bien, el anfitrión quiere que no haya dos conocidos con un ramo del mismo color. ¿Cuál es el mínimo número de colores requeridos para poder llevar a cabo su objetivo?

En términos de grafos: Consideremos el grafo G cuyos vértices representan a los invitados y cuyas aristas se establecen únicamente si los dos invitados son amigos. El problema se reduce a colorear los vértices con el mínimo número de colores de tal manera que no haya ninguna arista que una a dos vértices del mismo color.

A este mínimo se le denomina número cromático de vértices y se representa por $\chi(G)$.

Desde luego, si G es un grafo completo de orden n (es decir, todos los invitados se conocen entre sí) se necesitarán tantos colores como personas, es decir

$$\chi(C_n)=n.$$

Sin embargo, por lo general $\chi(G)<n$. De hecho se tiene el siguiente resultado, conocido como Teorema de Brooks

Sea G un grafo conexo que no sea grafo completo. Entonces $\chi(G) \leq$ *Máximo de los grados de los vértices.*

Aplicación a redes de teléfonos.

En el caso de los grafos planos, se puede conseguir una cota más restrictiva a la del Teorema de Brooks.

En general, si G es un grafo plano, se tiene que siempre que $\chi(G) \leq 4$. *Este resultado es conocido como el Teorema de los Cuatro Colores, y se puede ver en muchos libros enunciado como sigue: Cualquier mapa se puede colorear con a lo sumo 4 colores de tal manera que no haya dos países fronterizos del mismo color.*

Pasar de un mapa a un grafo es sencillo: Los vértices representarán a los países y las aristas se establecerán únicamente si dos países tienen frontera común.

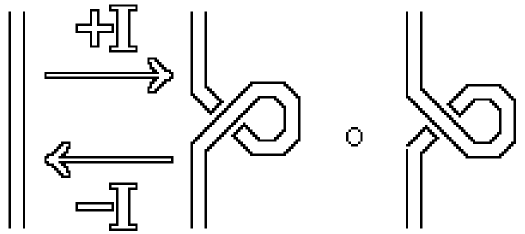
DESHACIENDO NUDOS

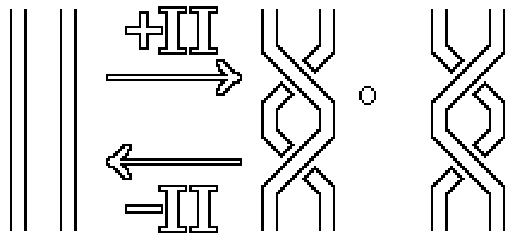
La Teoría de Nudos ha resultado ser desde sus orígenes mucho más complicada que lo que una cuerda anudada puede parecer al principio. Digamos que en esta Teoría se estudia la clasificación de todos los nudos y enlaces en el espacio, así como las deformaciones que hay que hacer para poder pasar de uno a otro en caso de tener equivalencia.

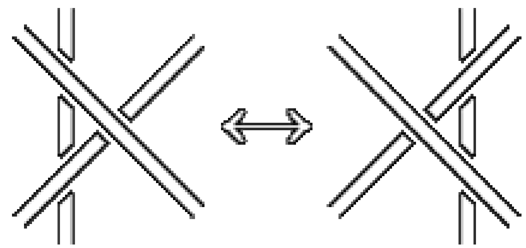
Por ejemplo, decidir si dado un nudo, éste se puede deshacer (es decir, deformarlo sin romperlo para obtener una circunferencia) puede ser extremadamente complicado.

$$\overset{?}{=}$$

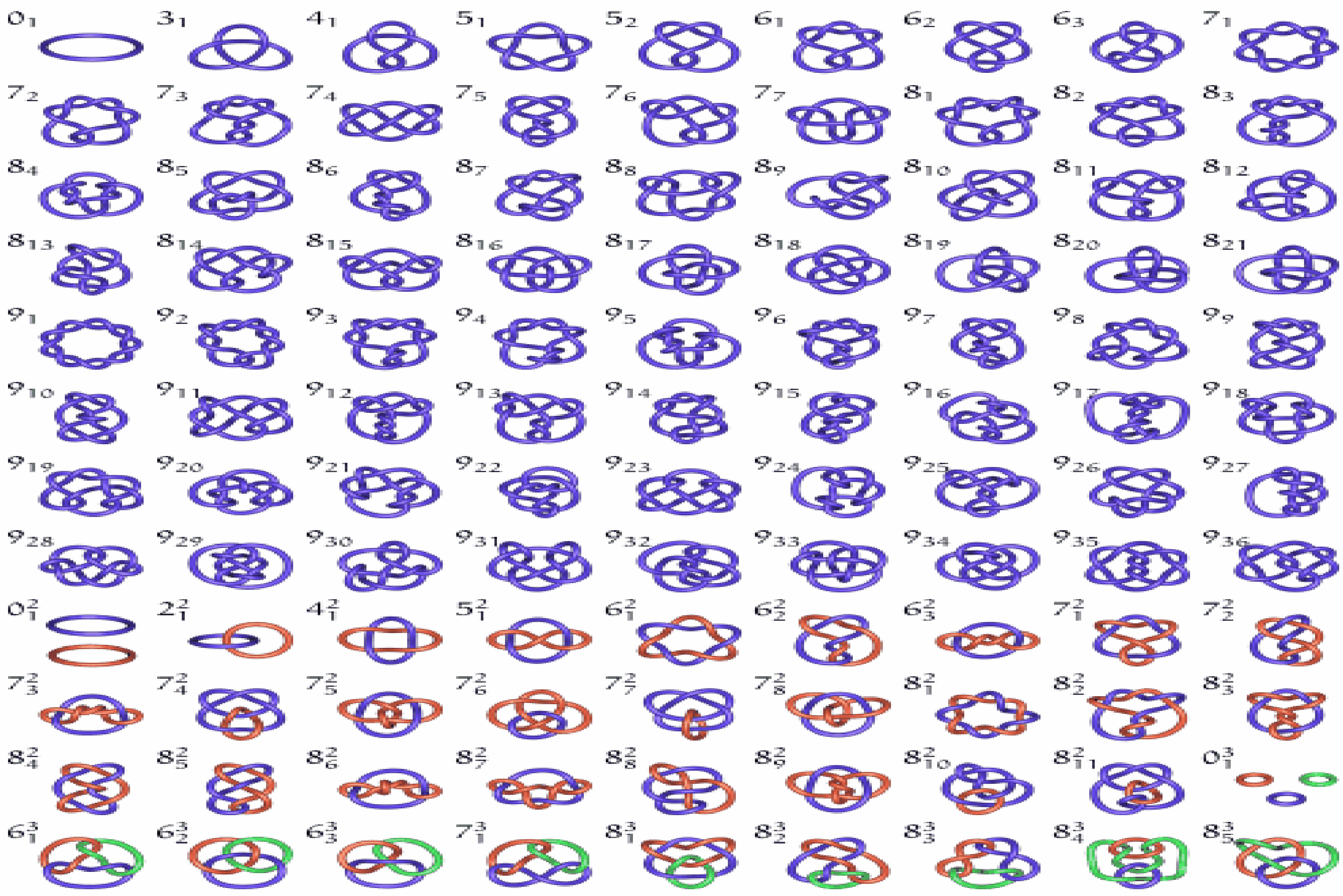
Sin embargo, se ha llegado hoy en día a resolver el problema por medio de algoritmos. Se hacen uso de las llamadas operaciones de Reidemeister, que esquemáticamente son las siguientes







A partir de estas 3 operaciones combinadas sirven para llevar un nudo a otro equivalente.


0_1
3_1
4_1
5_1
5_2
6_1
6_2
6_3
7_1
7_2
7_3
7_4
7_5
7_6
7_7
8_1
8_2
8_3
8_4
8_5
8_6
8_7
8_8
8_9
8_{10}
8_{11}
8_{12}
8_{13}
8_{14}
8_{15}
8_{16}
8_{17}
8_{18}
8_{19}
8_{20}
8_{21}
9_1
9_2
9_3
9_4
9_5
9_6
9_7
9_8
9_9
9_{10}
9_{11}
9_{12}
9_{13}
9_{14}
9_{15}
9_{16}
9_{17}
9_{18}
9_{19}
9_{20}
9_{21}
9_{22}
9_{23}
9_{24}
9_{25}
9_{26}
9_{27}
9_{28}
9_{29}
9_{30}
9_{31}
9_{32}
9_{33}
9_{34}
9_{35}
9_{36}
0^2_1
2^2_1
4^2_1
5^2_1
6^2_1
6^2_2
6^2_3
7^2_1
7^2_2
7^2_3
7^2_4
7^2_5
7^2_6
7^2_7
7^2_8
8^2_1
8^2_2
8^2_3
8^2_4
8^2_5
8^2_6
8^2_7
8^2_8
8^2_9
8^2_{10}
8^2_{11}
0^3_1
6^3_1
6^3_2
6^3_3
7^3_1
8^3_1
8^3_2
8^3_3
8^3_4
8^3_5

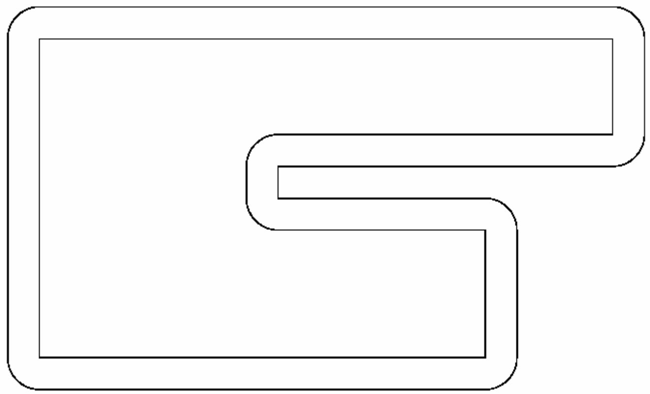
BANDAS QUE SE DEFORMAN

Supongamos una circunferencia de radio R y otra concéntrica de radio R+d. La diferencia de la longitud de ambas circunferencias es (por simple cálculo) $2\pi d$, independientemente del valor de R.

Por ejemplo, si rodea todo el Ecuador de la Tierra con un cable a ras del suelo. Si la longitud del cable se aumentase en un metro, ¿a qué altura habría que levantarlo uniformemente para conseguir dejarlo tenso? ¿Y si hago lo mismo con mi cinturón?

El resultado es sorprendente visto desde este punto de vista, pero no refleja más que una fórmula geométrica.

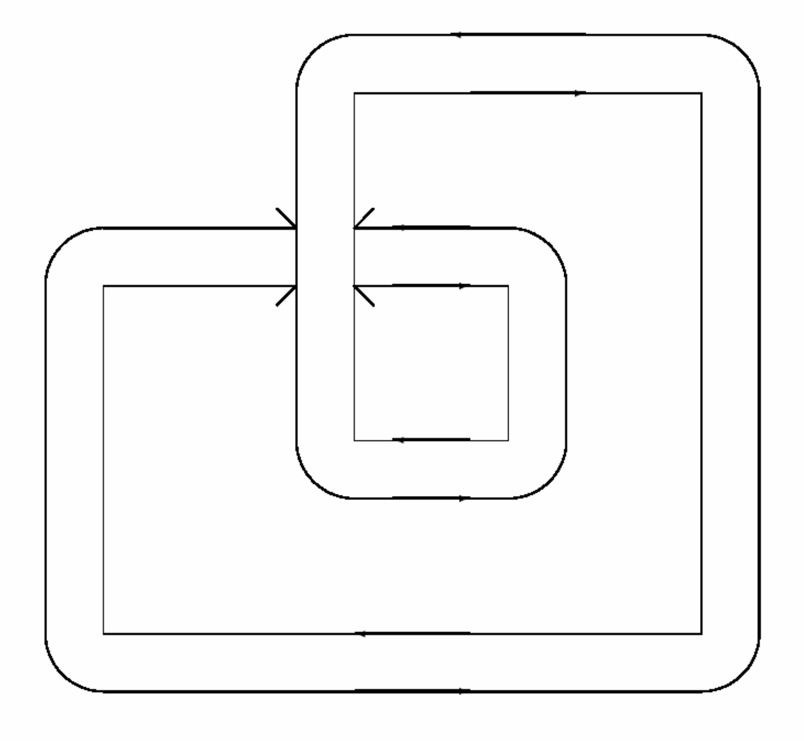
Supongamos que tenemos una curva cerrada cualquiera y trazamos paralelamente otra curva a distancia constante d. Queda dibujada una banda deformada que separa dos curvas. Nos preguntamos por la diferencia de longitudes de ambas curvas. Si trabajamos con arcos y polígonos, el resultado se puede calcular



El resultado es siempre el mismo. Por mucho que se deforme una curva (sin autointersecciones) la diferencia es exactamente 2πd.

Si la curva tiene autointersecciones, el resultado puede variar.

Por ejemplo, en este caso se tiene que la diferencia es $4\pi d$



En general lo que se obtiene es que la diferencia siempre toma un valor de $2\pi k d$ siendo k entero.
Este valor, con un significado totalmente topológico (es invariante por deformaciones de la curva original).

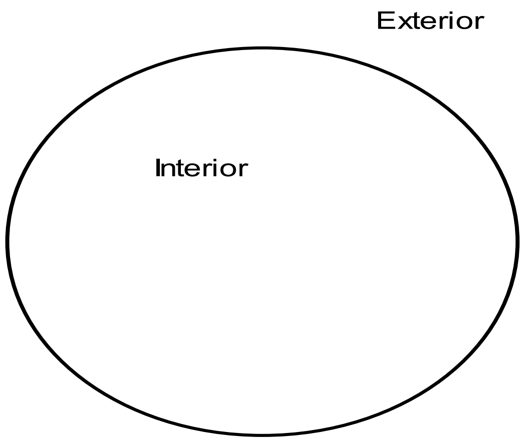
La k es exactamente el número de vueltas que la curva sobre sí misma.

DENTRO… FUERA

Hay un resultado conocido en Topología como el Teorema de la Curva de Jordan cuyo enunciado es absolutamente trivial pero que encierra al mismo tiempo de demostración complicada.

Toda curva trazada en el plano continuamente, sin autocortes y que empiece y termine en el mismo punto divide al plano en dos zonas, una de ellas acotada (zona que se denomina interior) y otra no acotada (zona que se denomina exterior).

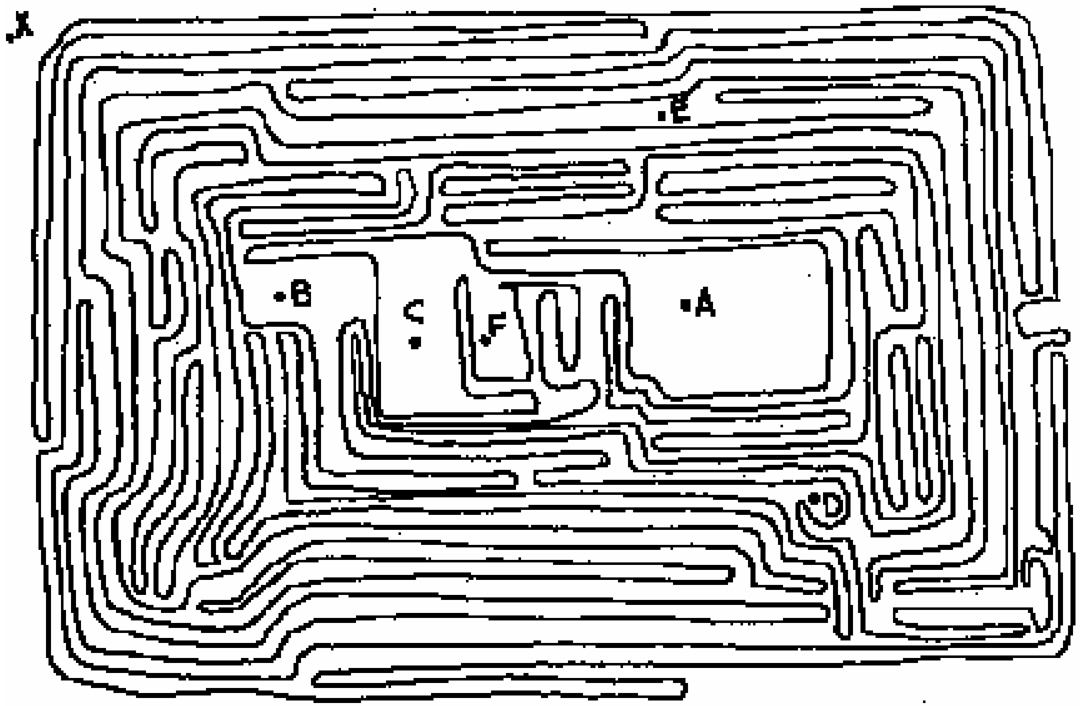
Efectivamente, una primera aproximación a dicho resultado es bastante desilusionante. ¡Es obvio!



Sin embargo, C. Jordan no fue capaz de dar una demostración satisfactoria en el año 1887, momento en que aventuró este resultado. Fueron necesarios 18 años de investigación para que O. Veblen pudiese dar una respuesta satisfactoria.

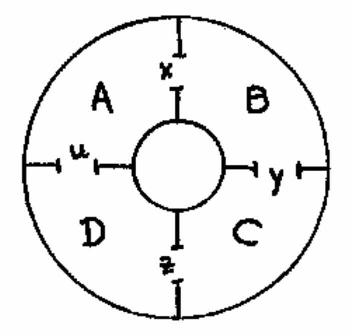
Lo interesante de este resultado puede verse en sencillos ejemplos como:

Si X está fuera, ¿dónde están los puntos A, B, C, D, y E?



O por ejemplo, el siguiente problema de un concurso de Matematicas de secundaria

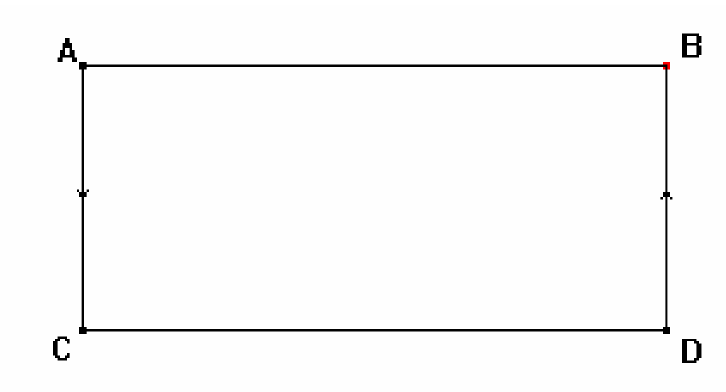
El pasillo de unas oficinas tiene forma circular y está dividido en cuatro compartimentos A, B, C, D. A partir de las 9, las únicas puertas por las que se puede entrar o salir son las marcadas con x, y, z, u. Un ordenanza está a las nueve en el compartimento A. Hasta las once ha pasado 7 veces por la puerta x, 4 veces por y, 6 veces por z y 4 veces por u. ¿Puedes adivinar en qué compartimento estará después del recorrido?



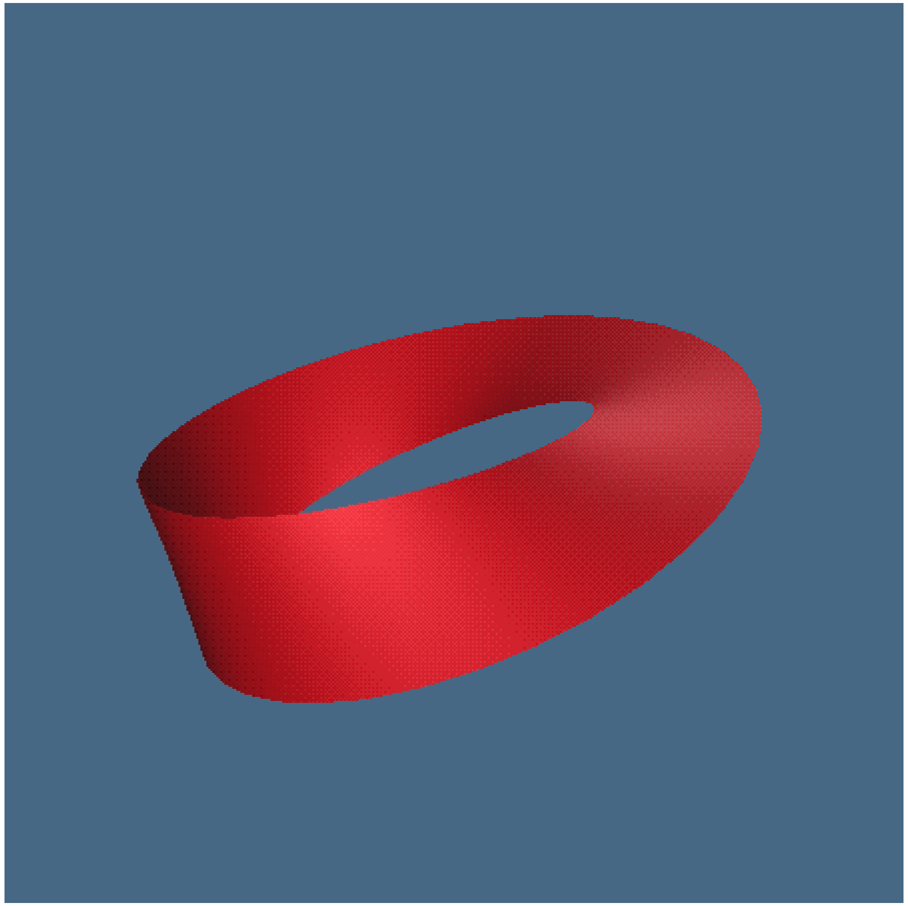
COSIENDO SUPERFICIES

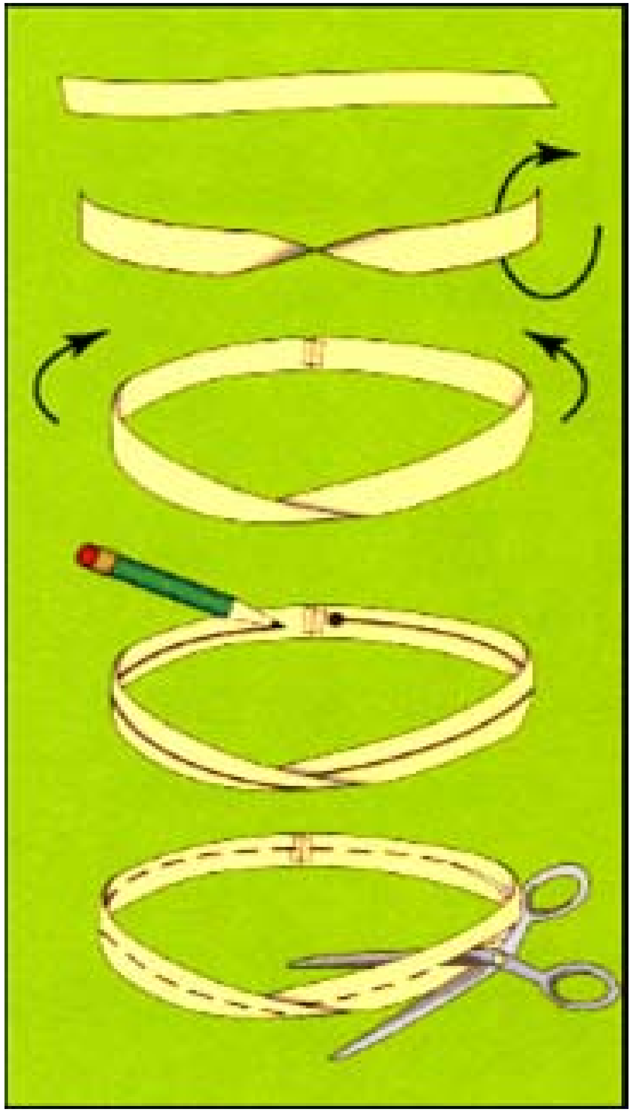
Partiendo de un trozo de tela (elástica) y cosiendo se pueden obtener superficies de una manera ingeniosa:

Por ejemplo, la banda de Moebius.

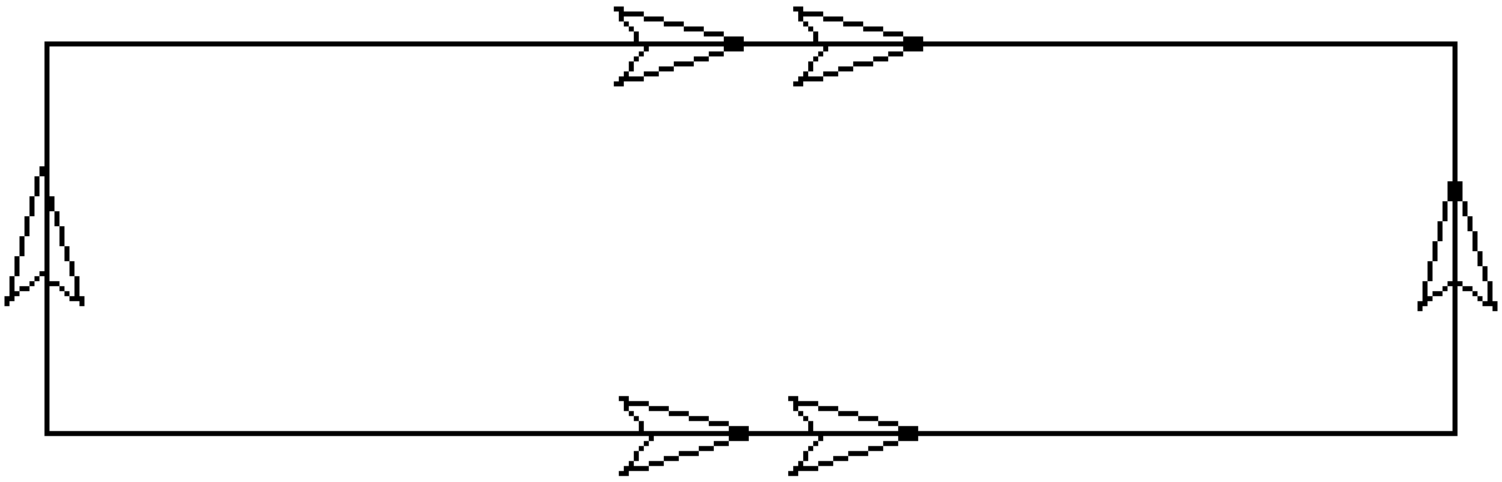


El resultado tiene una sola cara

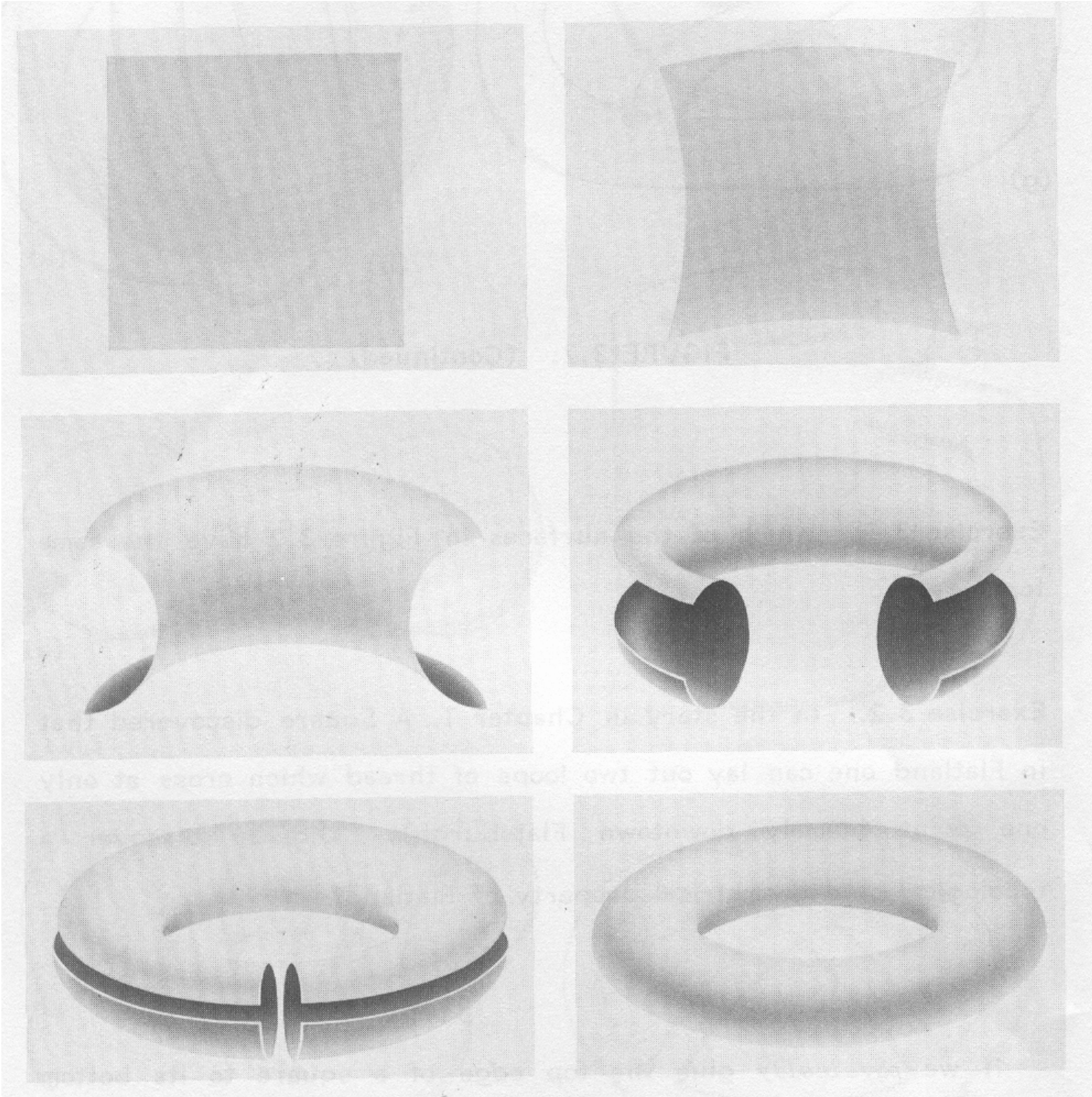




Si se cose un cuadrado de la siguiente manera

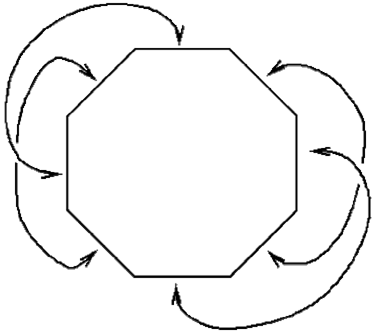


Se obtiene un toro (rosquilla)



El resultado es que cualquier superficie se puede obtener de esta manera, es decir, cosiendo los bordes de una tela de manera conveniente.

i



BIBLIOGRAFÍA

- S. Barr, Experiments in Topology, Thomas Y. Crowell Company, 1964.
- Béla Bollobás, Modern Graph Theory, Graduate Text in Mathematics nº184, Springer Verlag 1998.
- J.L. Carlavilla, G. Fernández, Aventuras Topológicas, Rubes Editorial 1994.
- Martin Gardner, Rosquillas Anudadas, Editoral Labor 1987.
- Oystein Ore, Grafos y sus aplicaciones, La Tortuga de Aquiles nº6, Editorial Euler 1995.
- R.T. Wilson, Introducción a la Teoría de Grafos, Alianza Editorial 1983.
- Mathematical Circles, AMS.