

NUEVAS TECNOLOGÍAS MODELIZACIÓN

Inmaculada Fernández Benito

Profesora de Secundaria. Valladolid

COORDINADORA DEL PROYECTO
ESTALMAT de VALLADOLID

Encarnación Reyes Iglesias

Profesora de Matemática Aplicada.
Universidad de Valladolid.

PROFESORA DEL PROYECTO ESTALMAT
DE VALLADOLID

EL PROYECTO ESTALMAT EN CASTILLA Y LEÓN (VALLADOLID)

Cuatro sedes:

- Burgos (Curso 2003/04)
- Valladolid, León y Segovia (Curso 2005/06)
- Formación durante dos años. (1º y 2º de ESO)
- Número de niños participantes: Aprox. 15 por grupo.
- Número de profesores equipo de Valladolid: 14
- En cada sesión intervienen dos profesores.
- Las unidades didácticas se imparten en tres o cuatro sesiones.
- La Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León envía la convocatoria de la prueba inicial a los Centros de Primaria.

ACTIVIDADES:

- Prueba de selección (resolución de problemas y entrevista con padres y niños).
- Campamento inicial en albergue de la Junta de Castilla y León.
- Formación en el aula: Jueves 3 horas en un IES de Valladolid.
- Encuentro de primavera en una de las sedes: exposición de resolución de problemas y actividades culturales.
- Participación en concursos de Matemáticas: Canguro y Olimpiadas.
- Acto de clausura (Conferencia, Diplomas).

ÁREA Y PERÍMETRO

TRAMAS

ARCOS

FRACTALES

POLÍGONOS

GENERALIDADES

TRIÁNGULOS

PAPIROFLEXIA

ESTRELLADOS Y ESTRELLAS

DISECCIONES

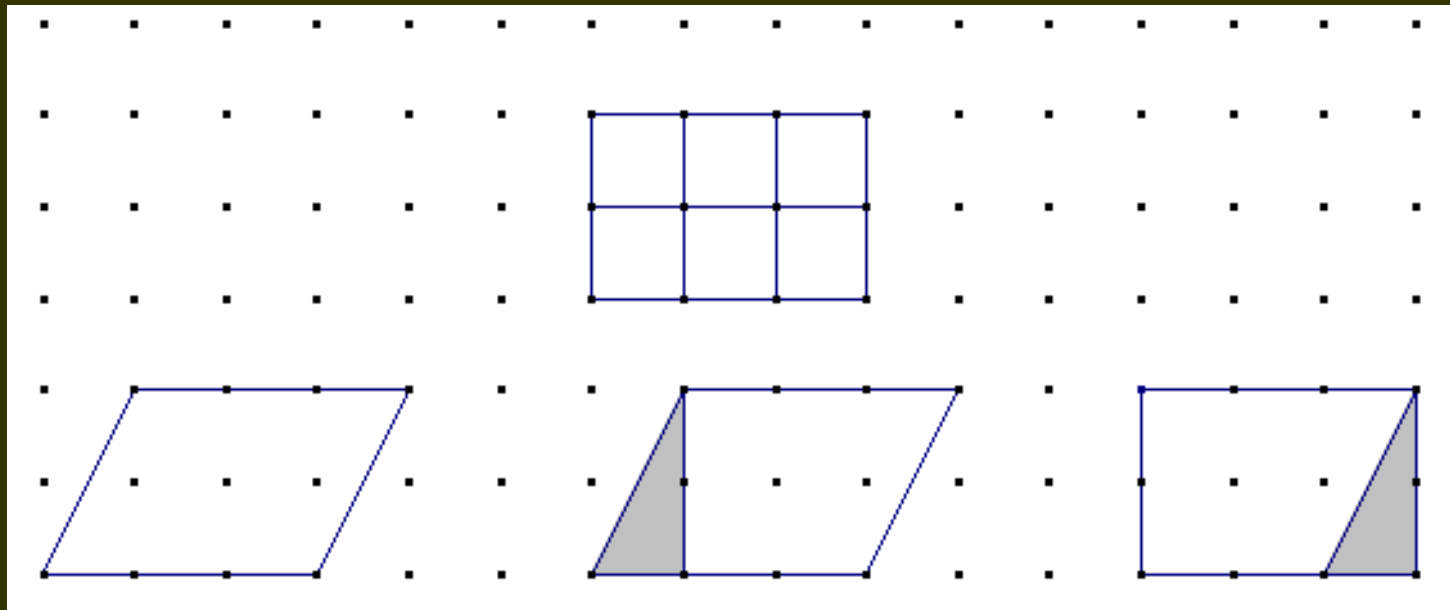
MOSAICOS

ACTIVIDADES

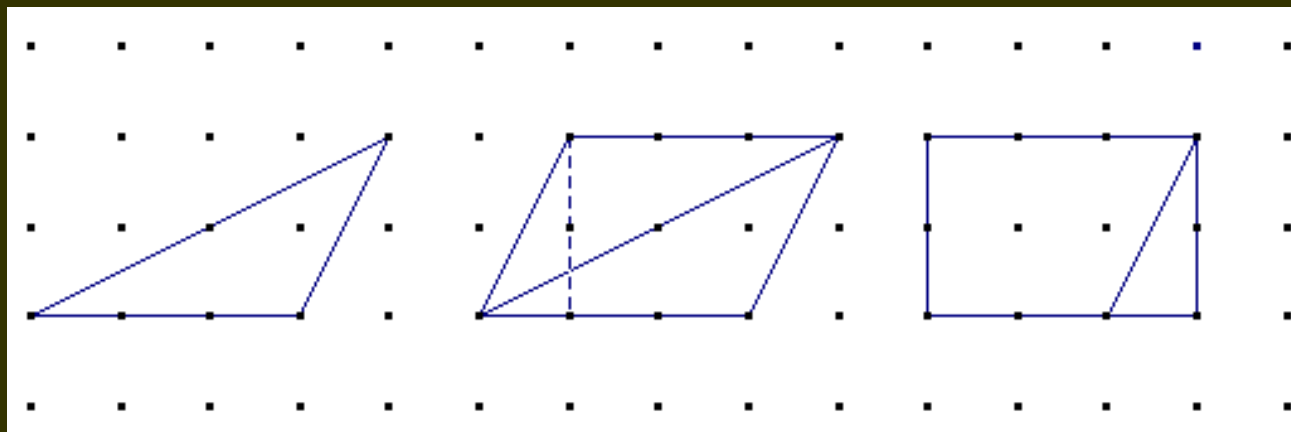
con

tramas

- Área de un paralelogramo

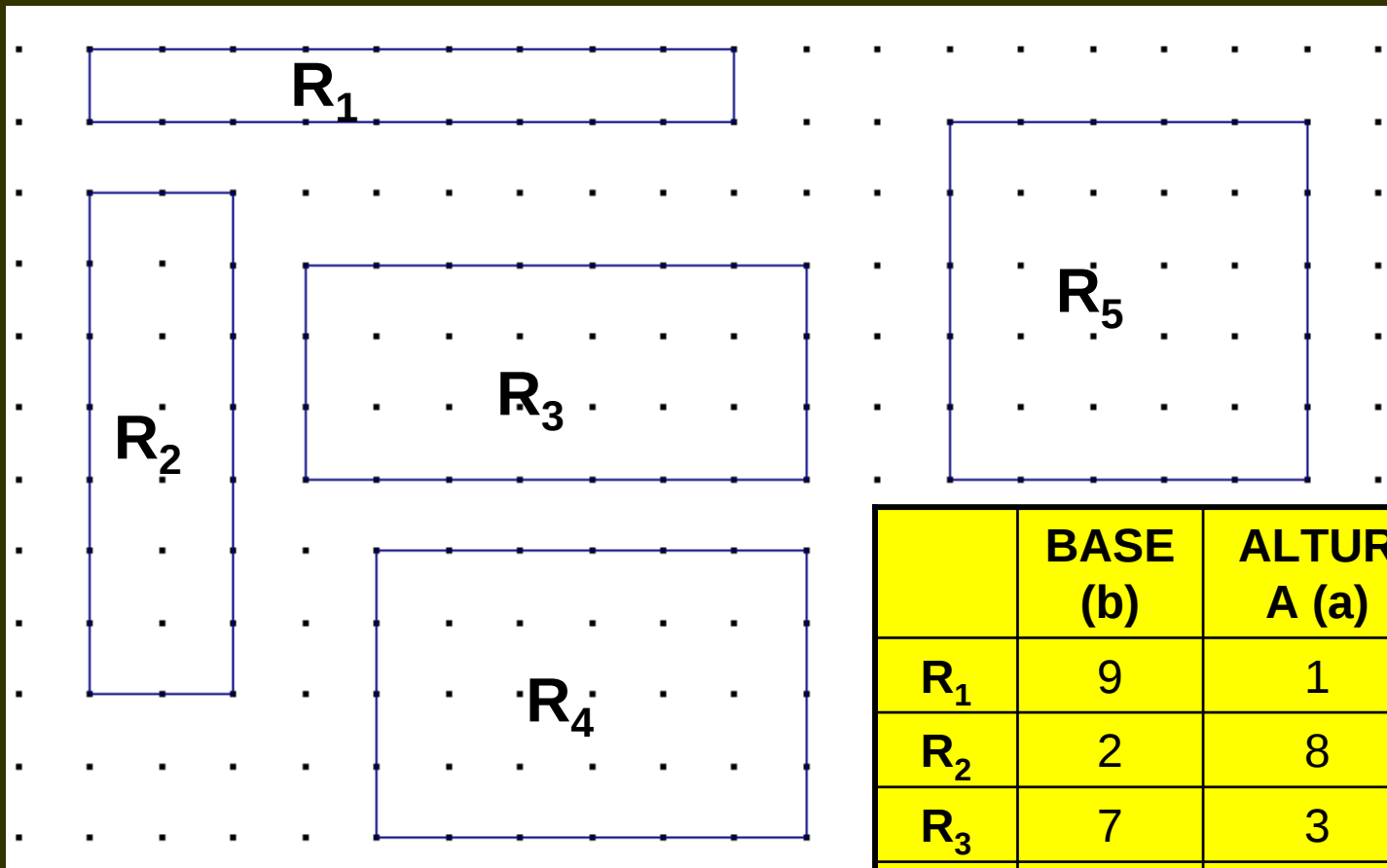


- Área de un triángulo



ÁREA Y PERÍMETRO

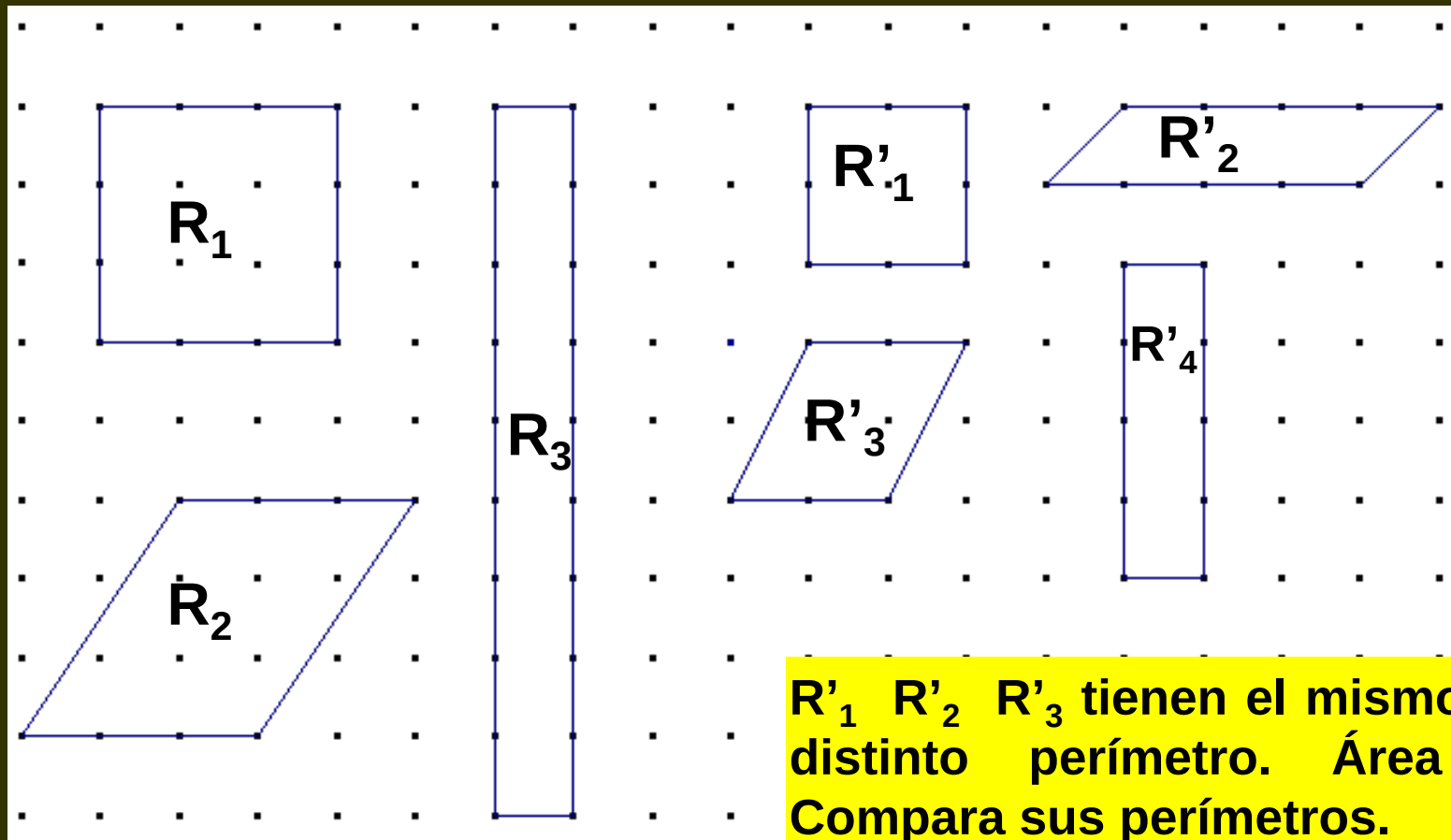
Dibuja todos los rectángulos de 20 unidades de perímetro



	BASE (b)	ALTUR A (a)	ÁREA (b.a)	PERÍM ETRO
R ₁	9	1	9	20
R ₂	2	8	16	20
R ₃	7	3	21	20
R ₄	6	4	24	20
R ₅	5	5	25	20

ÁREA Y PERÍMETRO

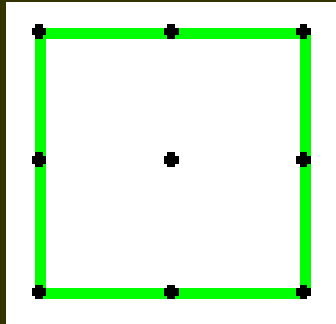
Dibuja todos los rectángulos de 9 y 4 unidades de área



R'_1 R'_2 R'_3 tienen el mismo área y distinto perímetro. Área = 4. Compara sus perímetros.

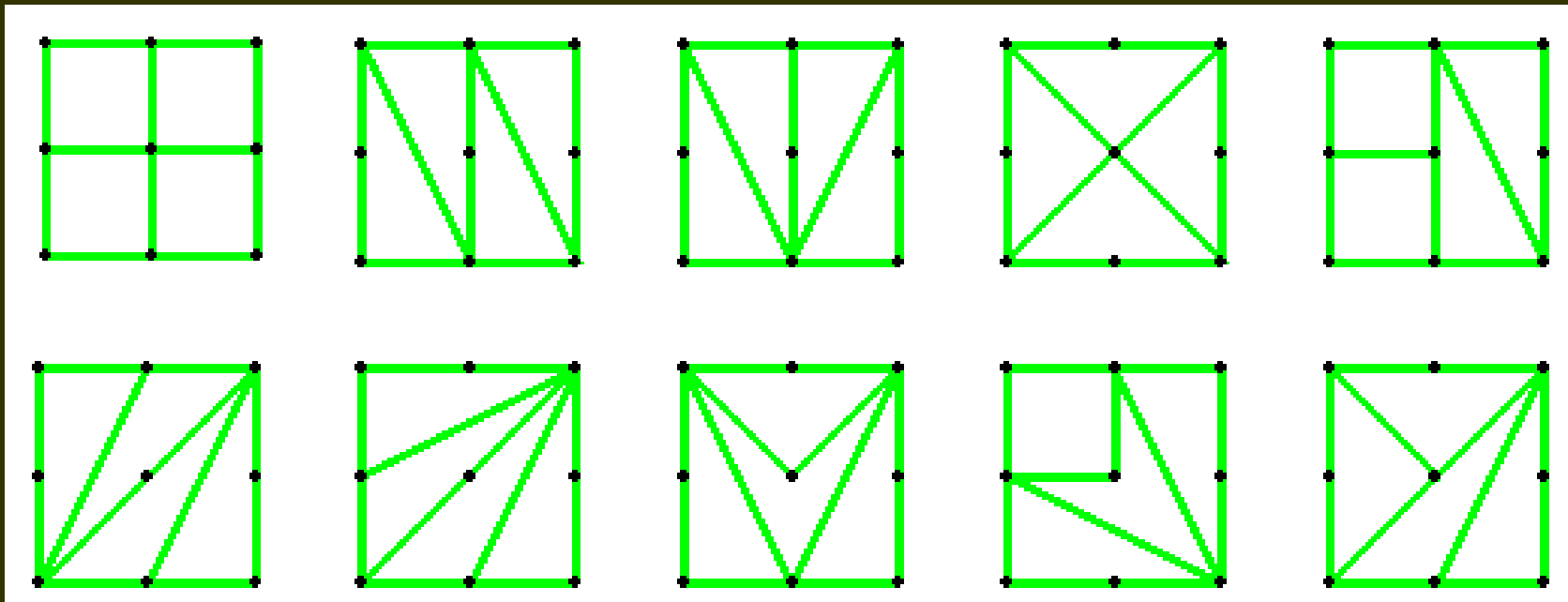
R_1 R_2 R_3 tienen el mismo área y distinto perímetro. Área = 9. Compara sus perímetros

DIVISIÓN DE UN CUADRADO EN CUATRO PARTES DE LA MISMA ÁREA (actividades en trama cuadrada)

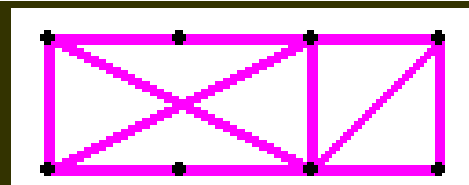
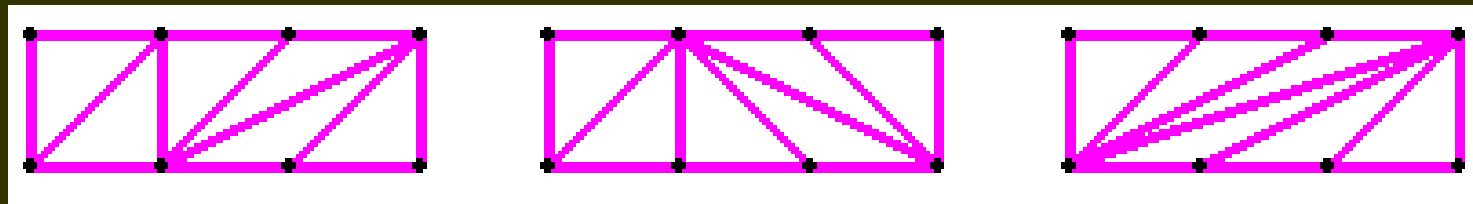
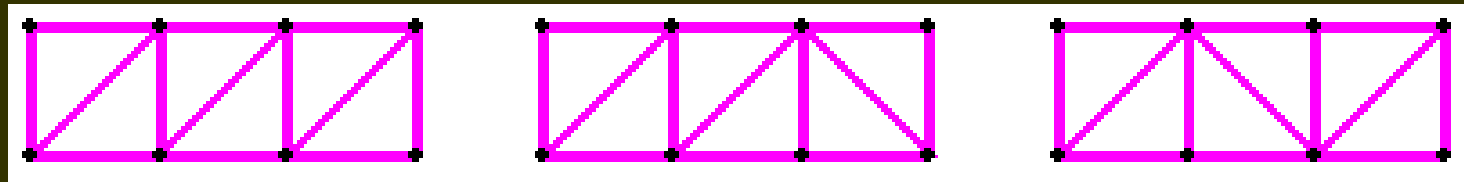
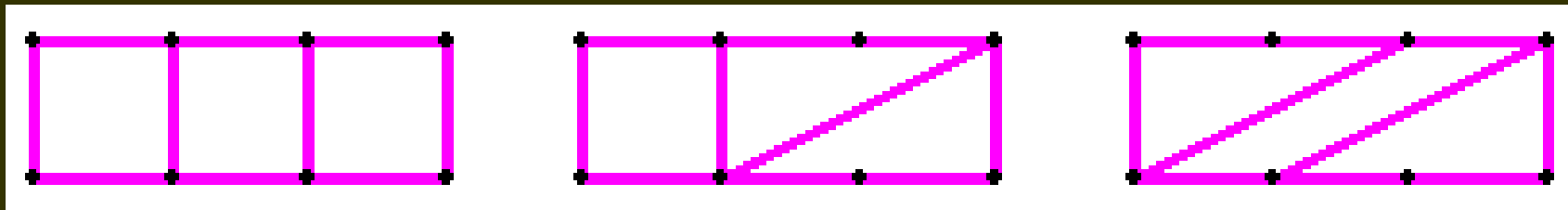
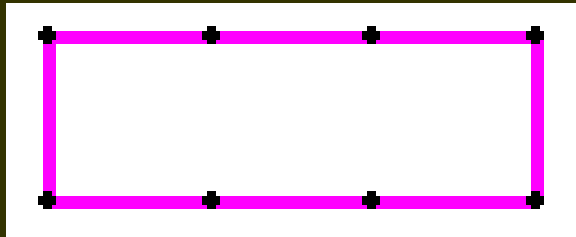


Tomando un cuadrado de dos unidades de lado (área 4 u^2), sobre nueve puntos.

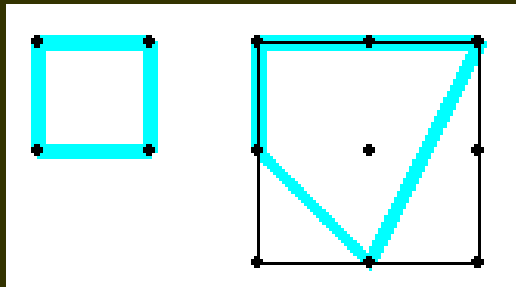
Uniendo los puntos, encuentra todas las posibles formas de dividirlo en cuatro partes de igual área (1 u^2).



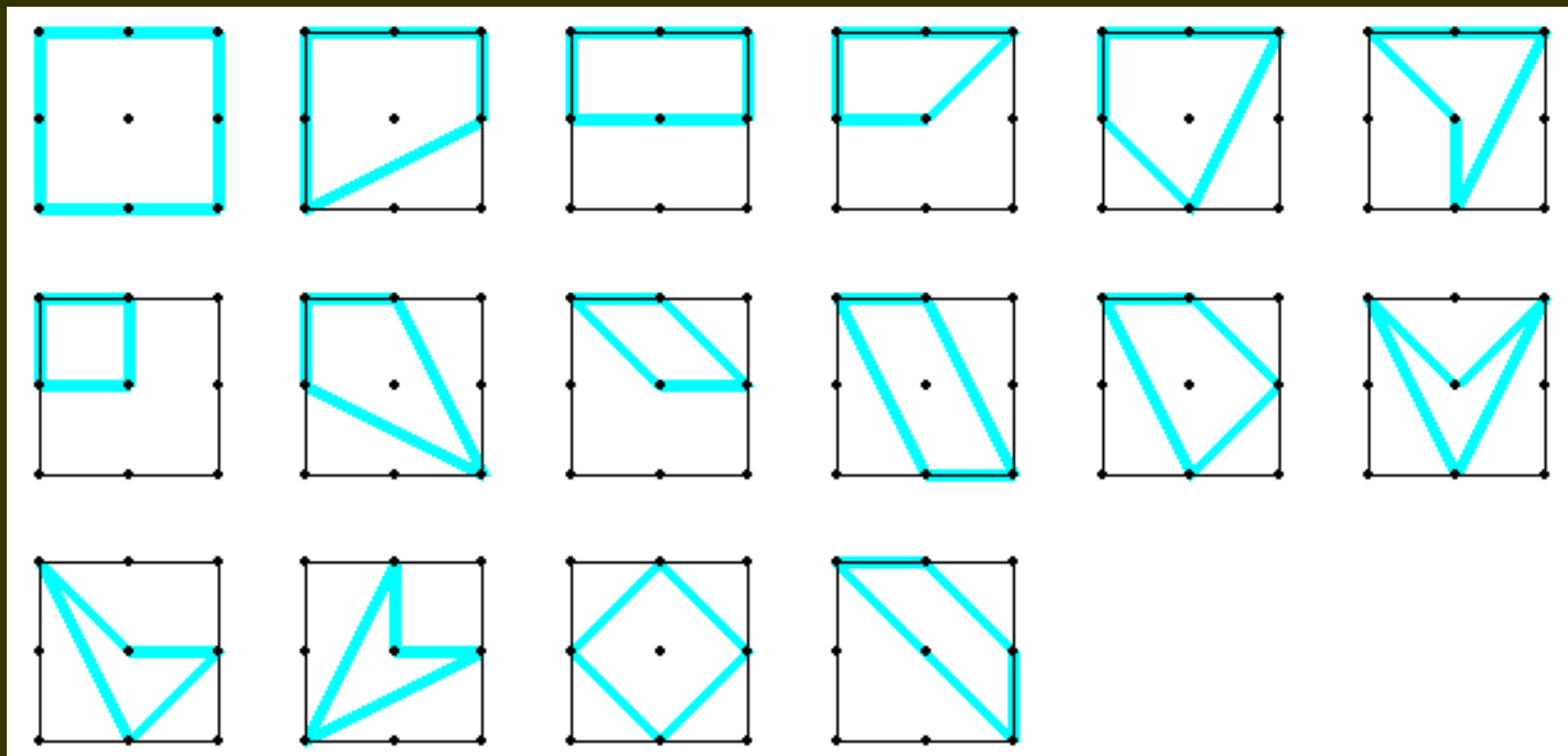
DIVISIÓN DE UN RECTÁNGULO EN TRES O SEIS PARTES DE LA MISMA ÁREA (actividades en trama cuadrada)



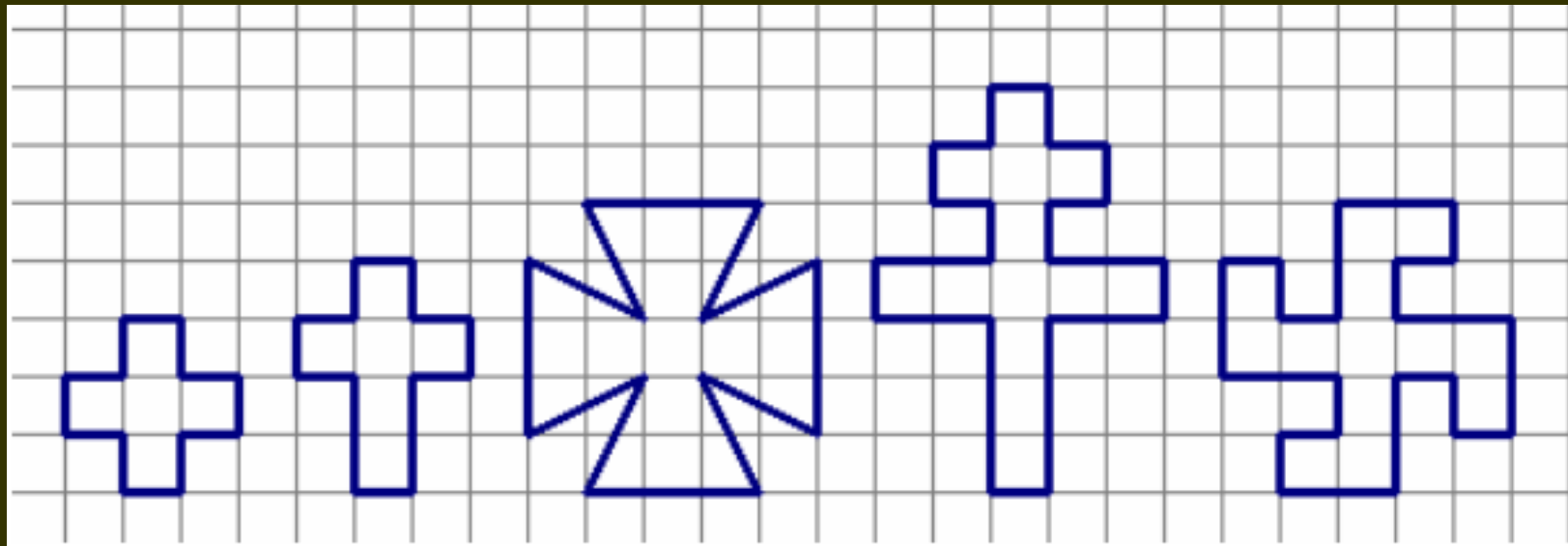
CUADRILÁTEROS SOBRE TRAMAS CUADRADAS DE 4 Y 9 PUNTOS



- Sobre 4 puntos el único cuadrilátero que se puede construir es un cuadrado.
- ¿Cuántos cuadriláteros se pueden construir sobre 9 puntos?
- Calcular sus perímetros y áreas.



CRUCES SOBRE UNA CUADRÍCULA



Tomando como unidad de longitud el lado del cuadrado de la cuadrícula y como unidad de área la del cuadrado de la misma cuadrícula. Calcular:

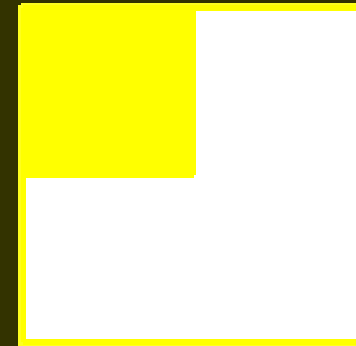
- Perímetros
- Áreas



PROBLEMA ARITMÉTICO-GEOMÉTRICO

ENUNCIADO

Una familia tiene un terreno en forma de cuadrado y quieren dividirla en cinco partes, una de ellas debe ser la cuarta parte situada como en la figura. Las otras cuatro partes deben tener todas ellas la misma área y la misma forma. ¿Cómo se puede hacer el reparto?

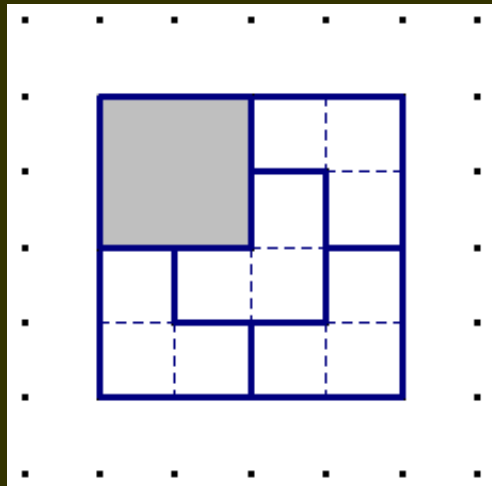
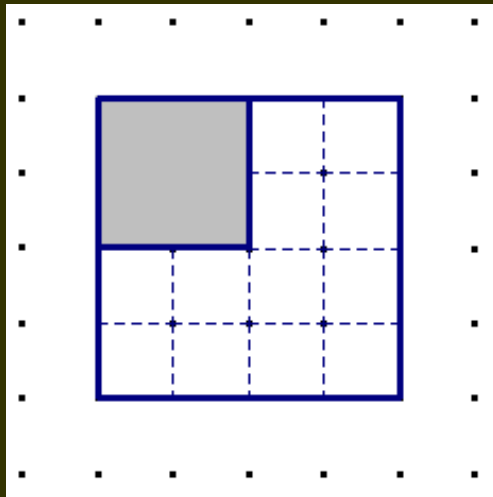


CONTENIDOS

- Números cuadrados
- Múltiplos y Divisores
- Fracciones
- Repartos

MATERIALES

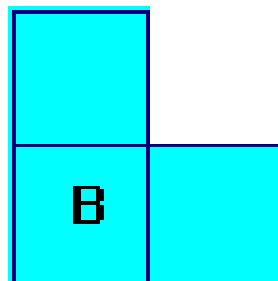
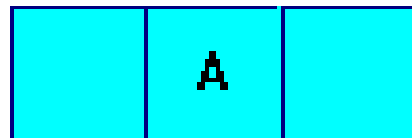
- Cuadrícula
- Poliminós



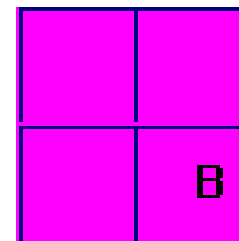
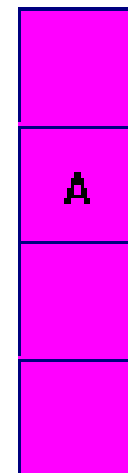
POLIMINÓS

- Dominó
- Triminós
- Tetraminós -TETRIS
- Pentaminós
- Hexaminós

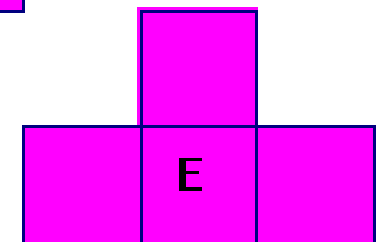
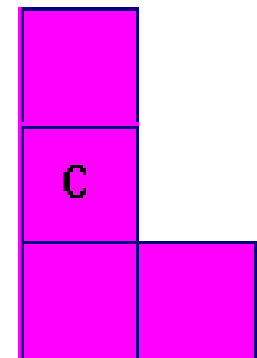
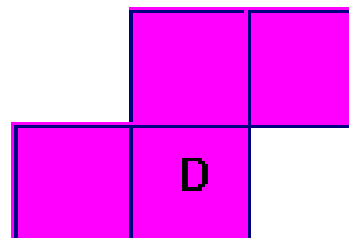
Igual área y distinto
perímetro



triminós



tetraminós



GEOMETRÍA CON ARCOS

CONTENIDOS:

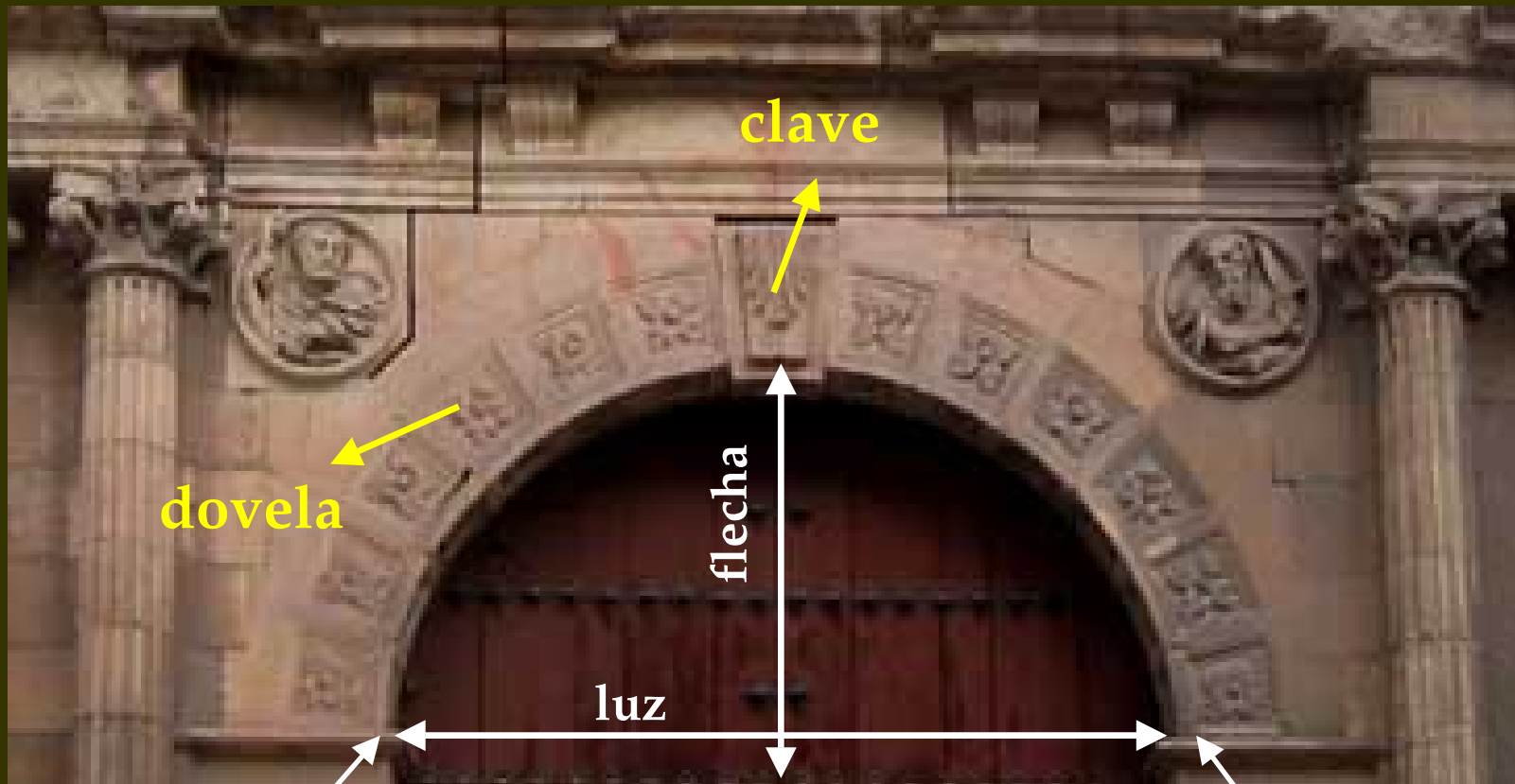
- Longitudes de circunferencias, sectores circulares.
- Áreas de círculos, sectores circulares

Geometría de arcos

Partes {
dovela
clave
arranques

Elementos

{
luz (L)
flecha (f)
esbeltez ($e = f / L$)

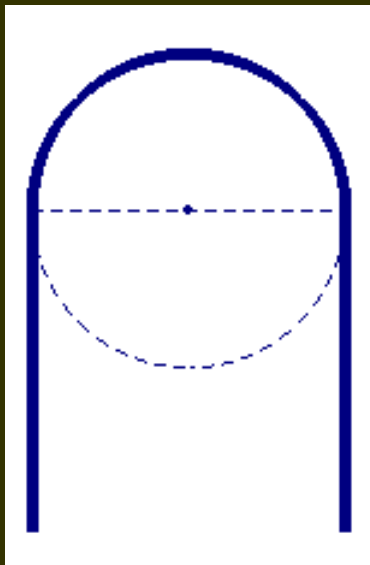


punto de arranque

punto de arranque

Arco de medio punto

Formado por **un** arco de circunferencia cuyo centro está en el punto medio del segmento que une los puntos de arranque.



$$f = \frac{L}{2}$$

$$e = \frac{1}{2}$$



ACUEDUCTO DE SEGOVIA

Arcos de medio punto o semicirculares Arte romano y románico

Arco de medio punto

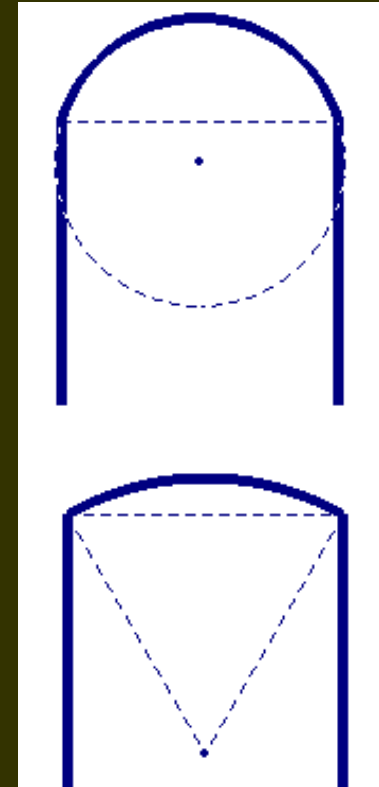
VARIANTES DEL ARCO DE MEDIOPUNTO

1.- Arco rebajado

- Centro sobre la mediatriz del segmento-luz (debajo de la línea de arranque).
- Flecha menor que la semiluz.

2.- Arco escarzano

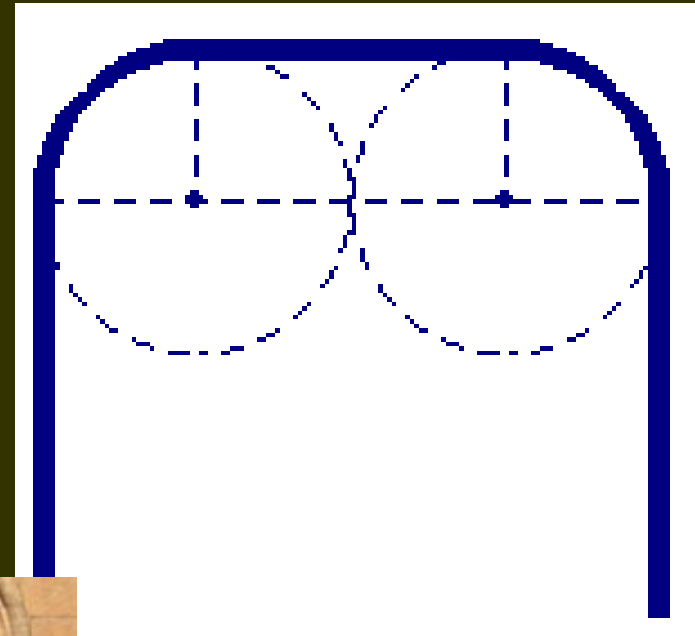
- Mismas características que el rebajado
- Centro en el vértice del triángulo equilátero de lado el segmento-luz.



Otros tipos de arcos

ARCO DEPRIMIDO CÓNCAVO

Formado por **dos** cuartos de circunferencia del mismo radio unidos por un segmento recto.

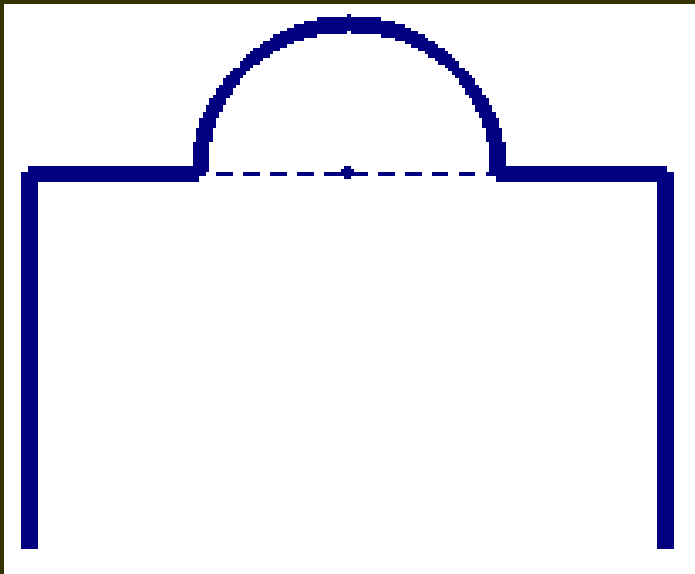


Casa palaciega
Ciudad Rodrigo
(SALAMANCA)

Otros tipos de arcos

ARCO GEORGIANO

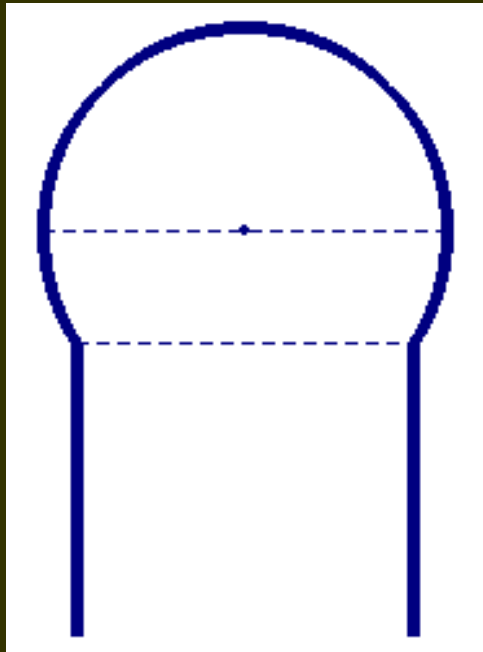
Formado por dos segmentos horizontales laterales unidos por **un** arco semicircular de radio igual o menor a un cuarto de luz y centro el punto medio de ésta.



Iglesia de San Martín
SALAMANCA

Arco de herradura

Formado por **un** arco de circunferencia con centro sobre la mediatriz del segmento-luz y por encima de la línea de arranque.

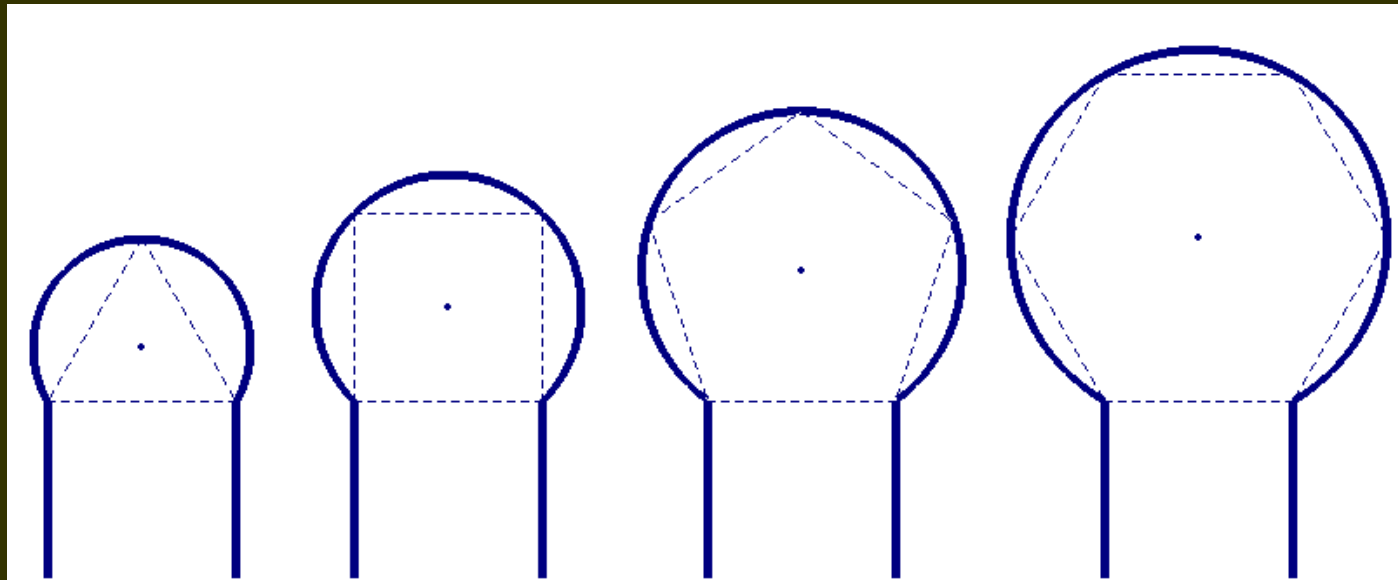


Arco de herradura COMILLAS
Estilos visigótico, árabe, mozárabe y mudéjar.

Arco de herradura

Arcos de herradura circunscritos a un polígono regular de lado el segmento luz.

Al aumentar el número de lados del polígono manteniendo fija la longitud de su lado (L), la flecha del arco circunscrito aumenta, así como su esbeltez.



Arco de herradura

	TRIÁNGULO	CUADRADO	PENTÁGONO	HEXÁGONO
Radio	$R_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} L$	$R_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} L$	$R_5 = \frac{1}{\sqrt{3-\Phi}} L$	$R_6 = L$
Longitud	$\frac{4\pi}{3} R_3$	$\frac{3\pi}{2} R_4$	$\frac{8\pi}{5} R_5$	$\frac{5\pi}{3} R_6$
Flecha	$f_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} L$	$f_4 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} L = \frac{\theta}{2} L$	$f_5 = \sqrt{L^2 \Phi^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4\Phi+3} L$	$f_6 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) L$
Esbeltez	$e_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$e_4 = \frac{\theta}{2}$	$e_5 = \frac{\sqrt{4\Phi+3}}{2}$	$e_6 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Las letras Φ y θ denotan el número de oro y el de plata

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\theta = 1 + \sqrt{2}$$

Arco de herradura

Radio de los arcos o de los polígonos correspondientes

TRIÁNGULO

El radio es la distancia del baricentro a uno de los vértices $R_3 = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} L = \frac{\sqrt{3}}{3} L$

CUADRADO

El radio es la mitad de la diagonal $R_4 = \frac{1}{2} \sqrt{2} L = \frac{\sqrt{2}}{2} L$

HEXÁGONO

El radio es igual al lado $R_6 = L$

Arco de herradura

Radio del arco para el PENTÁGONO $R_5 = \frac{1}{\sqrt{3-\Phi}} L$

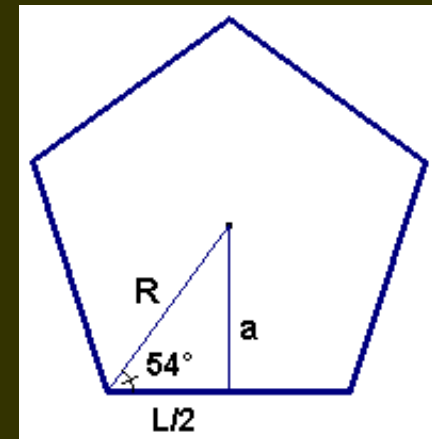
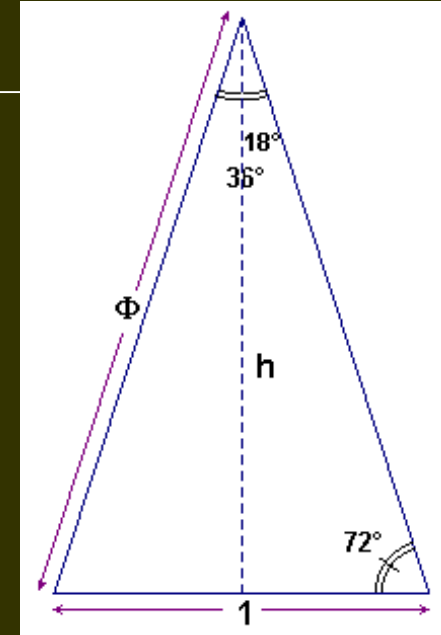
$$\sin 18^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2\Phi} \Rightarrow \cos 18^\circ = \cos \sqrt{\frac{4\Phi^2 - 1}{4\Phi_2}} = \frac{1}{2\Phi} \sqrt{4\Phi + 3}$$

$$\cos 36^\circ = \cos \frac{72^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 72^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2\Phi}}{2}} = \sqrt{\frac{2\Phi + 1}{4\Phi}} = \sqrt{\frac{\Phi^3}{4\Phi}} = \frac{\Phi}{2} = \sin 54^\circ$$

$$\sin 54^\circ = \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{\Phi}{2} = \frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{\Phi}{2} R$$

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = R^2 - a^2 = R^2 - \frac{\Phi^2}{4} R^2 = R^2 \left(\frac{4 - \Phi^2}{4}\right)$$

$$\frac{L}{2} = \frac{R}{2} \sqrt{4 - \Phi^2} = \frac{R}{2} \sqrt{4 - (\Phi + 1)} = \frac{R}{2} \sqrt{3 - \Phi} \quad L = R \sqrt{3 - \Phi}$$



Arco de herradura

Longitudes de los arcos de herradura

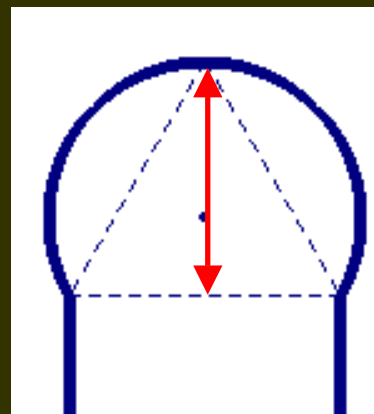
Abarcan sectores circulares de ángulos: $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{5}$ y $\frac{5\pi}{3}$

Las longitudes en función de sus radios son: $\frac{4\pi}{3}R_3$, $\frac{3\pi}{2}R_4$, $\frac{8\pi}{5}R_5$ y $\frac{5\pi}{3}R_6$

Flechas de los arcos o de herradura

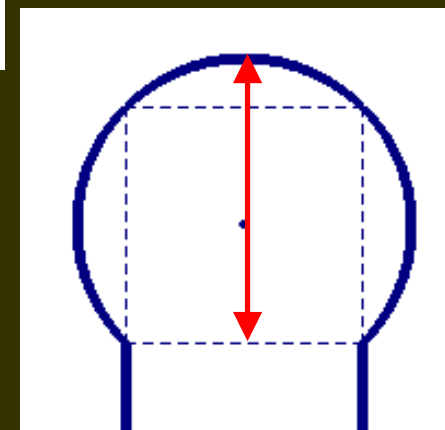
TRIÁNGULO

La flecha es la altura $F_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}L$



CUADRADO

La flecha es $F_4 = \frac{L}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}L = \frac{1+\sqrt{2}}{2}L = \frac{\theta}{2}L$



θ número de plata

Arco de herradura

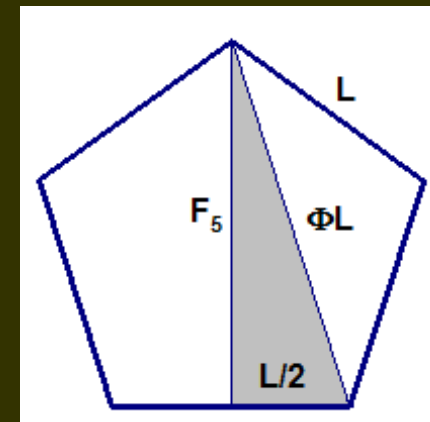
Flechas de los arcos de herradura

PENTÁGONO

La flecha se calcula el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado:

$$F_5 = \sqrt{L^2\Phi^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L}{2}\sqrt{4\Phi^2 - 1} = \frac{L}{2}\sqrt{4\Phi + 3}$$

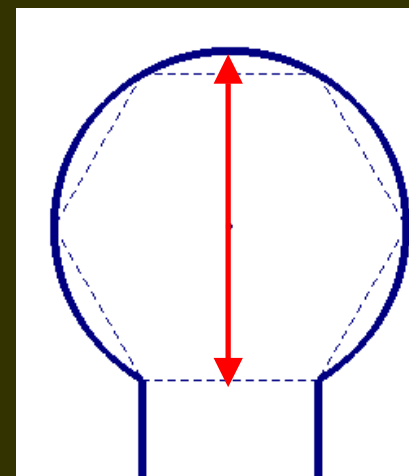
Φ número de oro



HEXÁGONO

La flecha es la suma del radio o lado y la apotema:

$$F_6 = L + \frac{\sqrt{3}}{2}L = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)L$$

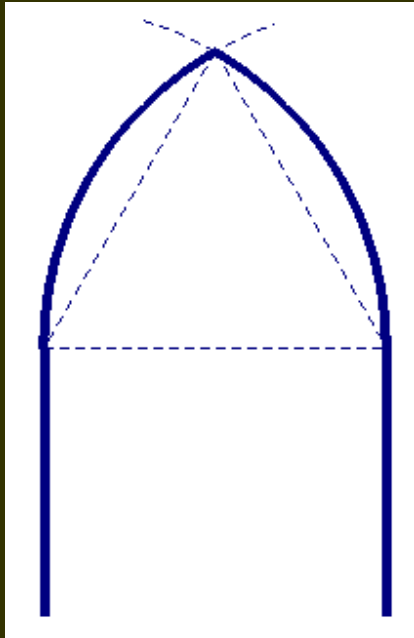


Esbeltez de los arcos de herradura

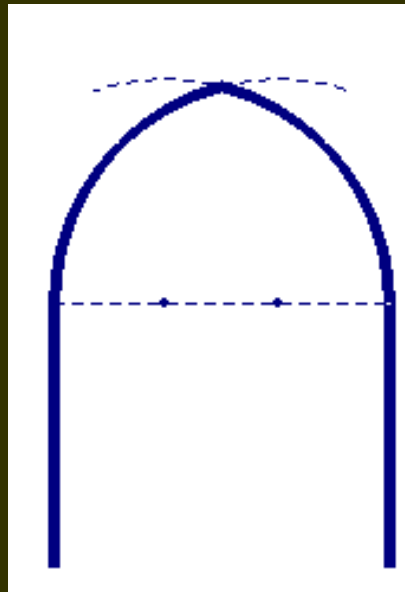
$$e_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e_4 = \frac{\theta}{2}, \quad e_5 = \frac{\sqrt{4\Phi + 3}}{2} \quad \text{y} \quad e_6 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Arco ojival

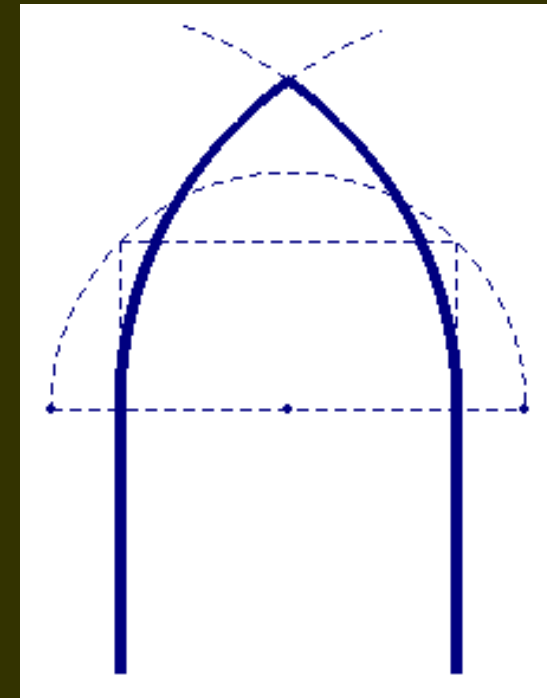
Formado por **dos** arcos de circunferencia del mismo radio con centros en dos puntos situados sobre la línea de luz.



Ojival o apuntado: centros en los puntos de arranque



Romano de ojivas o de tercio punto: centros dividiendo al segmento luz en tres partes iguales



Lancetado de ojivas: centros exteriores a los puntos de arranque y separados por distancia mayor que la luz.

Arco ojival

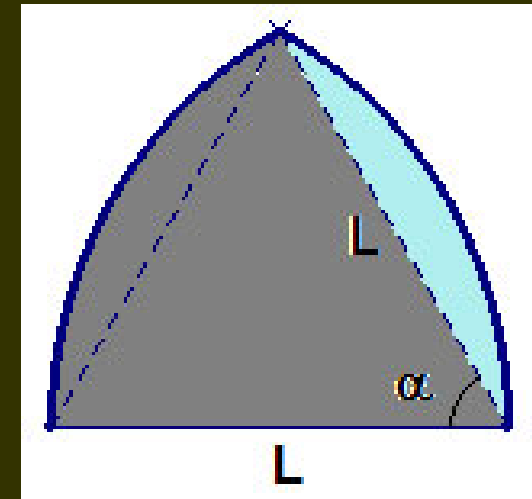
LONGITUD Y ÁREA DEL ARCO OJIVAL EQUILÁTERO

La longitud es el doble de la del arco del sector circular de ángulo $\alpha = \pi/3$ y radio la luz .

$$\text{long} = 2 \cdot \frac{\pi}{3} L = \frac{2\pi}{3} L$$

El área es la suma de las áreas del sector anteriormente considerado y del segmento circular del mismo radio y ángulo:

$$\text{Área} = \frac{\pi L^2}{6} + \left(\frac{\pi L^2}{6} - \frac{1}{2} L \frac{L\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) L^2$$



Arco ojival

LONGITUD Y ÁREA DEL ARCO OJIVAL DE TERCIO DE PUNTO

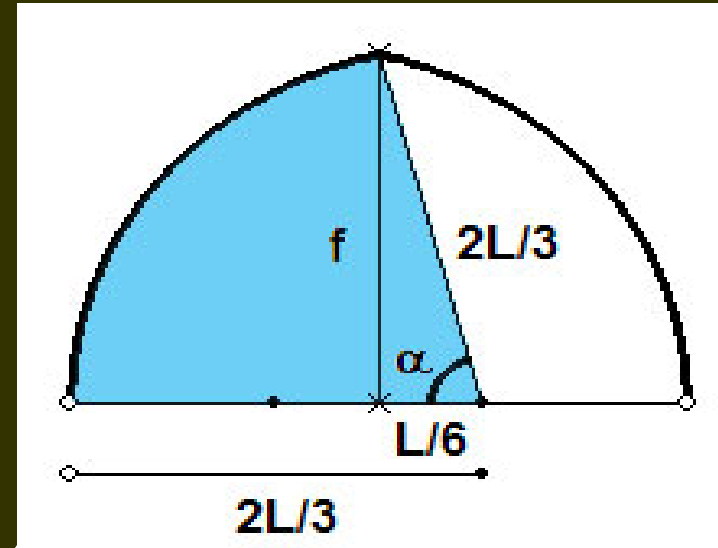
La **longitud** es el doble de la del arco del sector circular de radio $\frac{2L}{3}$ y ángulo α tal que:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{L}{6}}{\frac{2L}{3}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{long} = 2 \cdot \frac{2L}{3} \alpha = \frac{4\alpha L}{3}$$

El **área** es dos veces la diferencia entre el área

del sector circular A_s de ángulo α y radio $\frac{2L}{3}$ y el área del triángulo A_T de base $\frac{L}{6}$ altura $f = \sqrt{\left(\frac{2L}{3}\right)^2 - \left(\frac{L}{6}\right)^2} = \frac{L\sqrt{15}}{6}$

$$\text{Área} = 2 \cdot (A_s - A_T) = 2 \cdot \left(\frac{\pi \left(\frac{2L}{3}\right)^2}{2\pi} \cdot \alpha - \frac{1}{2} \frac{L}{6} \frac{L\sqrt{15}}{6} \right) = 2 \cdot \left(\frac{2\alpha}{9} - \frac{\sqrt{15}}{72} \right) \cdot L^2 = \frac{16\alpha - \sqrt{15}}{36} L^2$$



Arco ojival

LONGITUD Y ÁREA DEL ARCO LANCETADO DE OJIVAS

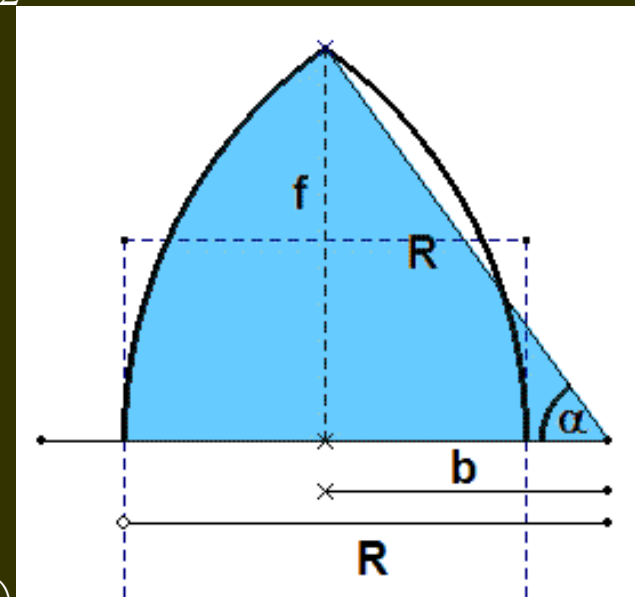
Su longitud es el doble de la del arco del sector circular de radio $R = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) \cdot L$ y ángulo α tal que:

$$\cos \alpha = \frac{L\sqrt{2}/2}{(1+\sqrt{2})L/2} = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow \text{long} = 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot L = \alpha (1+\sqrt{2}) L = \alpha \theta L.$$

El área es dos veces la diferencia entre el área del sector circular A_s de radio R y ángulo α y el área del triángulo A_T de base: $b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L$ y altura:

$$f = \sqrt{\left(\frac{(1+\sqrt{2})L}{2} \right)^2 - \left(\frac{L\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \frac{L\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2}$$

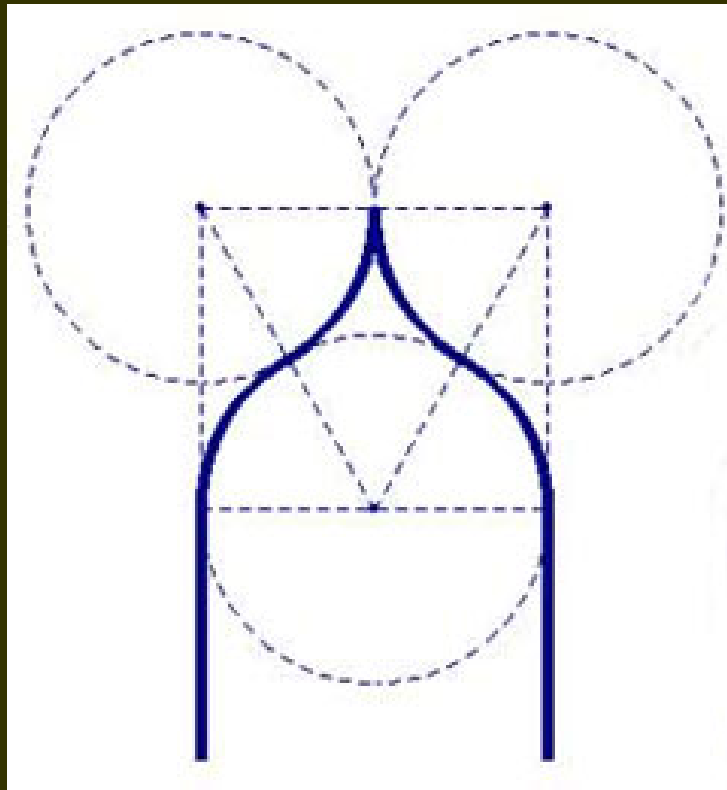
$$\text{Área} = 2 \cdot (A_s - A_T) = 2 \cdot \left(\frac{\pi \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot L^2}{2\pi} \cdot \alpha - \frac{\sqrt{2}}{8} \sqrt{1+2\sqrt{2}} \cdot L^2 \right) = \frac{(1+\sqrt{2})^2 \cdot \alpha - \sqrt{2} \sqrt{1+2\sqrt{2}}}{4} L^2$$



Morfología comparada de arcos y hojas de plantas

ARCO FLAMIGERO O CONOPIAL EQUILÁTERO

Formado por **cuatro** arcos de circunferencia del mismo radio y centrados en los vértices de un triángulo equilátero de lado la luz.

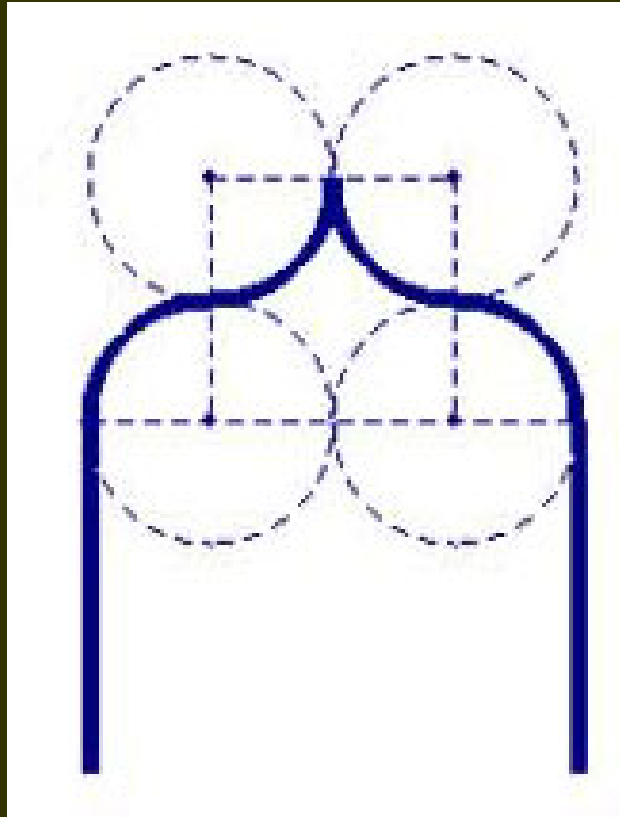


**Hoja de ápice mucronado
chopo común**

Morfología comparada de arcos y hojas de plantas

ARCO CONOPIAL GENUINO O CONOPIAL CUADRADO

Formado por cuatro arcos de circunferencia del mismo radio centrados en los vértices de un cuadrado de lado la semiluz.

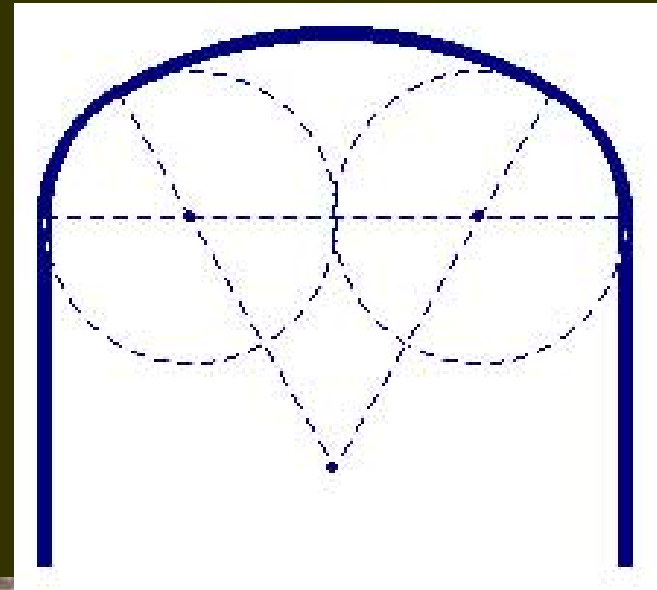


**Hoja de ápice mucronado
chopo común**

Morfología comparada de arcos y hojas de plantas

ARCO CARPANEL

Formado por **tres** arcos de circunferencia. En el del dibujo dos arcos abarcan 60° , y el tercero tiene su centro en el vértice de un triángulo equilátero de lado la semiluz.



Hoja simple ovalada

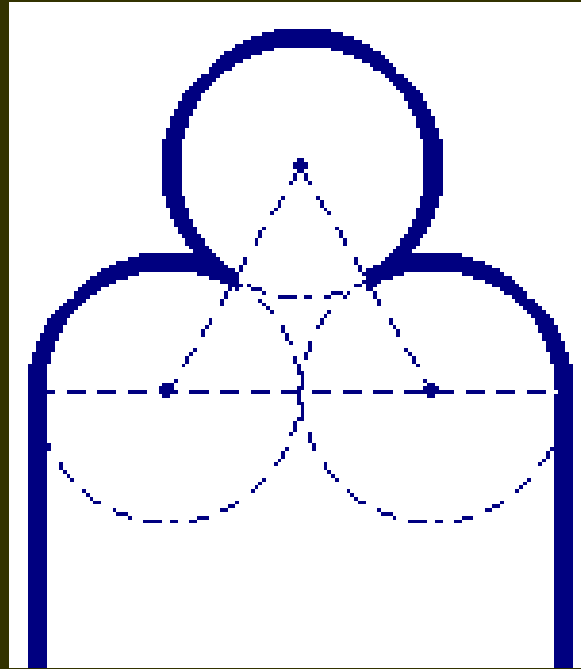


**Ayuntamiento de Ciudad Rodrigo
(Salamanca)**

Morfología comparada de arcos y hojas de plantas

ARCO TREBOLADO

El arco trebolado está formado por **tres** arcos cuyos centros son los vértices de un triángulo equilátero, dos de ellos situados sobre el segmento-luz y el tercero por encima de éste.



Trébol común



Iglesia de San Matías (Budapest)

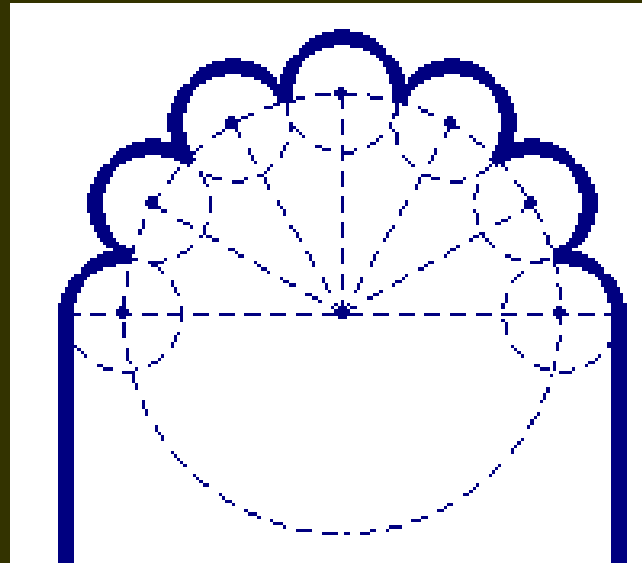


Fachada Norte Catedral de Burgos

Morfología comparada de arcos y hojas de plantas

ARCO POLILOBULADO

Está formado por **varios** arcos semicirculares tangentes entre sí, con centros sobre una circunferencia centrada en el punto medio del segmento luz.



**Planta
ornamental**



Gran Sinagoga Budapest

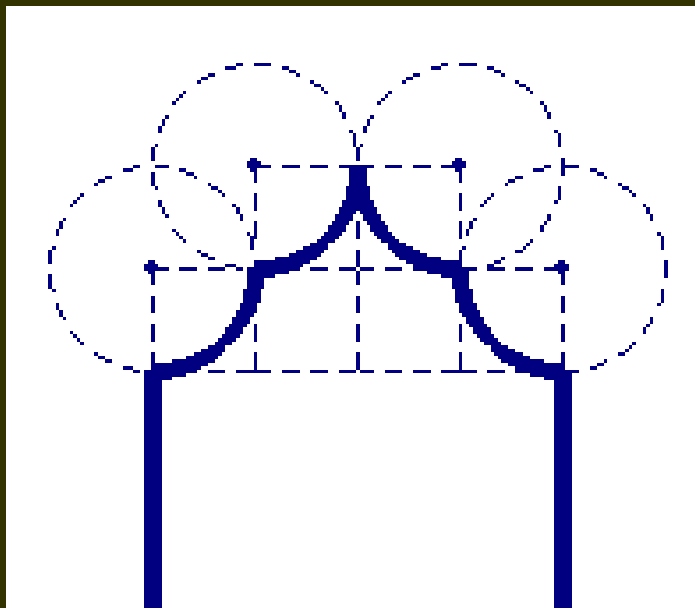


Alcázar de Sevilla

Morfología comparada de arcos y hojas de plantas

ARCO FESTONEADO (convexo)

Se construye a partir de la división del segmento luz en n partes iguales que da lugar a una malla de cuadrados. Los **cuatro** arcos que componen el arco son cuartos de circunferencias secantes.



Arco interior
Iglesia de San Pablo
VALLADOLID

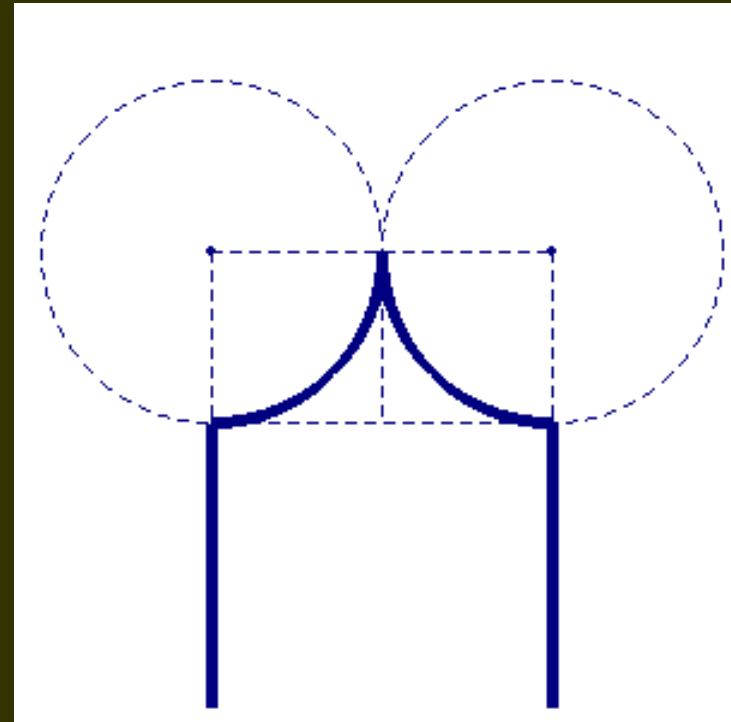


Álamo

Morfología comparada de arcos y hojas de plantas

ARCO FESTONEADO GENUINO O CORTINA

Es un caso particular del arco festoneado. Está formado por **dos** arcos de cuarta parte circunferencia con radio la mitad del segmento luz.

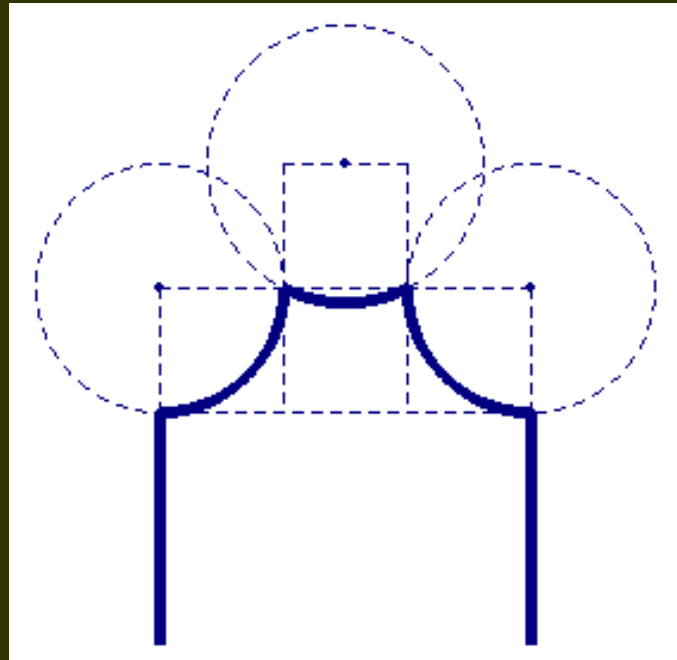


Entrada a casa particular - Portugal

Morfología comparada de arcos y hojas de plantas

ARCO FESTONEADO (impar)

Formado por **tres** arcos de circunferencias centradas en la malla de cuadrados de lado un tercio del segmento luz.



Los arcos festoneados formados por un número impar de arcos de circunferencia ofrecen una apariencia diferente a los de un número par.

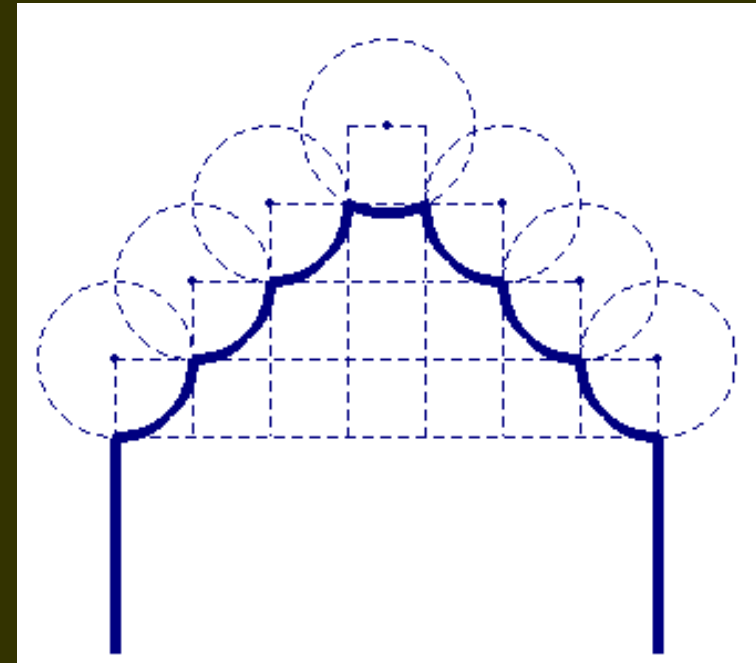


Fachada
Casa de las Conchas
SALAMANCA

Morfología comparada de arcos y hojas de plantas

ARCO FESTONEADO (impar)

Formado por **siete** arcos de circunferencias centradas en la malla de cuadrado de lado la octava parte del segmento luz.

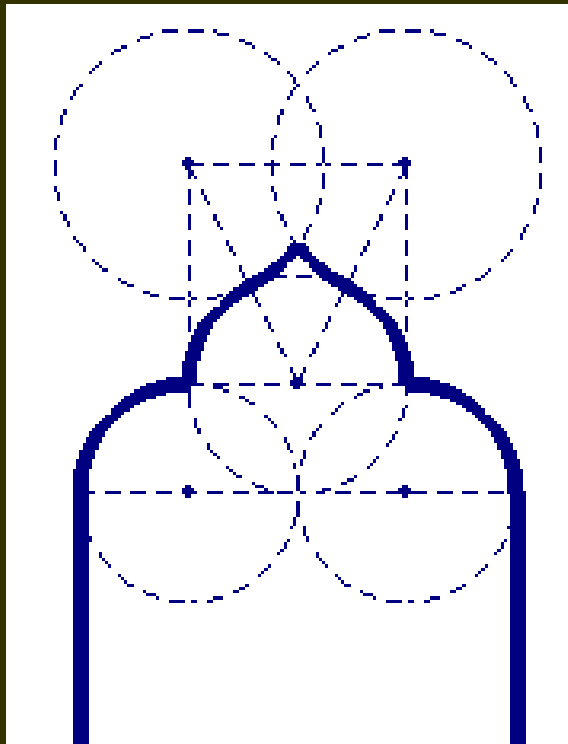


Acebo

Morfología comparada de arcos y hojas de plantas

ARCO ANGRELADO

Está formado por **seis** arcos pertenecientes a cinco circunferencias.



Planta silvestre



Palacio de Venecia

ACTIVIDADES DE AULA

El arco de la fotografía está en la iglesia románica de San Isidoro de León.

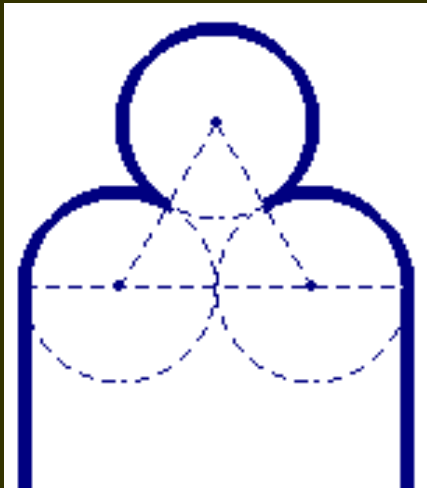


Suponiendo que el segmento luz mide 1 m., la flecha 35 cm. y los arcos curvos son arcos de circunferencia de radio 25 cm.

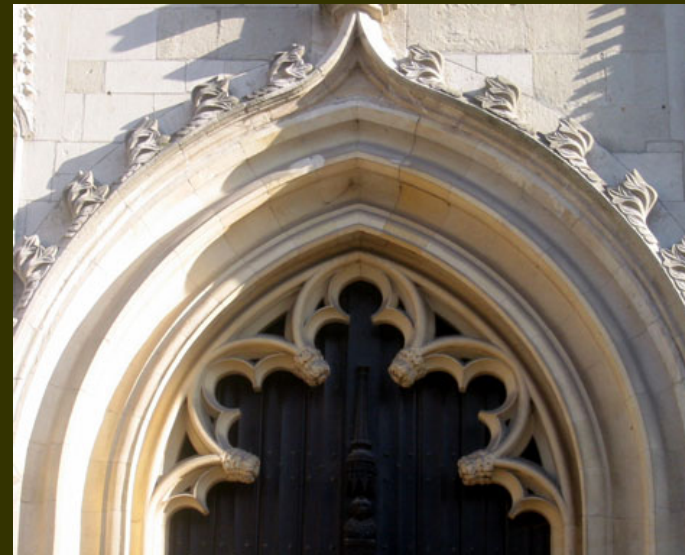
1. Dibuja, con regla y compás o utilizando el programa CABRI, un esquema del arco.
2. Calcula el perímetro de todo el arco y el área comprendida entre él y el segmento luz.



ACTIVIDADES DE AULA



1. Calcula la longitud del arco trebolado del dibujo y el área comprendida entre él y su segmento luz.
2. En las fotografías aparecen variaciones del arco trebolado. Calcula los radios de los sucesivos arcos de circunferencia en función del segmento luz L .
3. Repite los cálculos del apartado 1. para los arcos trebolados interiores.



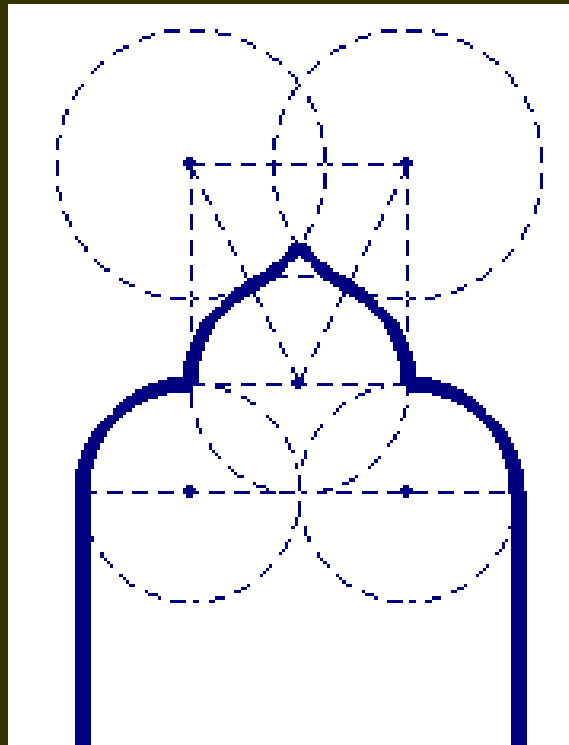
ACTIVIDADES DE AULA

1. Describe los elementos característicos de los diferentes arcos que aparecen.
2. Clasifícalos según el número de centros, o su posición respecto a la línea de luz.
3. Realiza un dibujo que modele las diferentes formas de entrelazados.



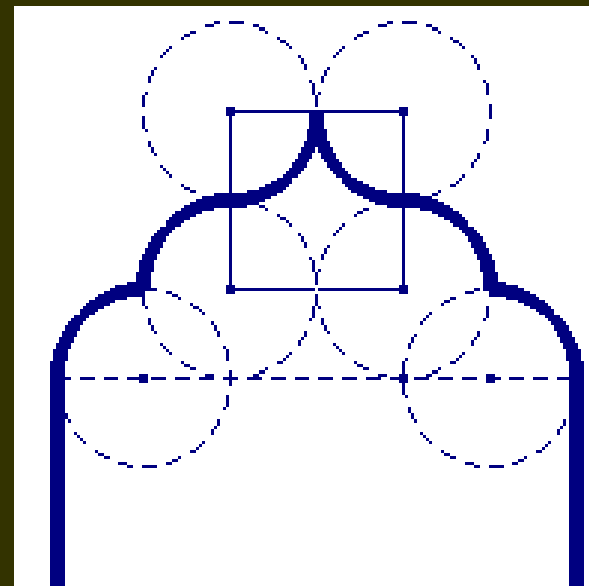
Monasterio de San Juan de Duero
(SORIA)

ACTIVIDADES DE AULA



Determina en función de la luz L los radios de las cinco circunferencias base del arco angrelado o festoneado cóncavo y de las seis circunferencias del angrelado florenzado.

Tener en cuenta que las dos circunferencias superiores tienen sus centros en los vértices de un cuadrado



COMPETENCIAS DEL CURRÍCULO DE ESO CASTILLA Y LEÓN

- Competencia en comunicación lingüística.
- **Competencia matemática.**
- **Competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico.**
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- **Competencia cultural y artística.**
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

Competencia matemática:

- Aplicar estrategias de resolución de problemas.
- Aplicar procesos matemáticos a situaciones cotidianas.
- Comprender elementos matemáticos.
- Comunicarse en lenguaje matemático.
- Identificar ideas básicas.
- Interpretar información
- Justificar resultados.
- Razonar matemáticamente.
- Interpretar información gráfica.

MODELIZACIÓN

El modelado o modelización es una técnica cognitiva que consiste en la generación de una representación o modelo ideal de un objeto o fenómeno real.

Para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la modelización puede entenderse de dos maneras:

- Construcción de modelos, adecuados a cada nivel de enseñanza, como los propuestos en el Informe PISA.
- Uso de modelos ya establecidos.

¿Por qué MODELIZACIÓN?

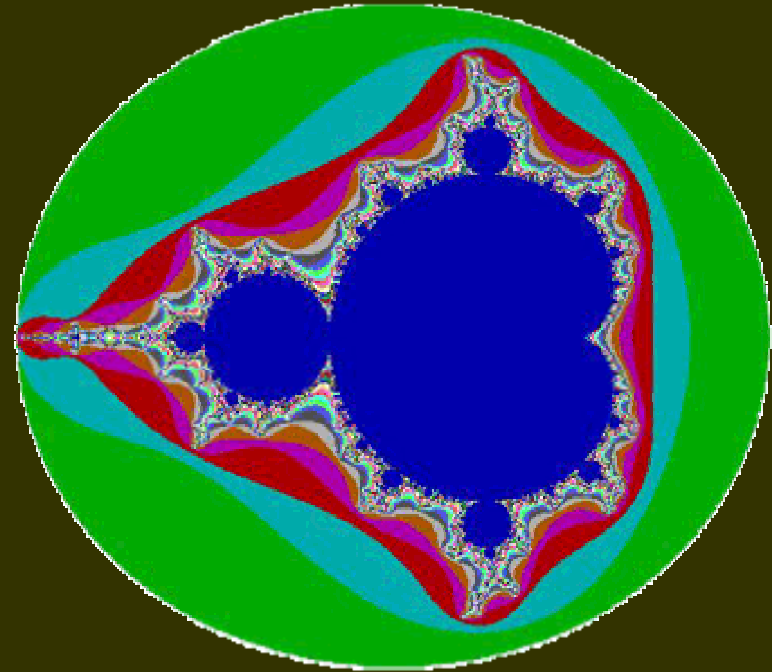
- La modelización refuerza el conocimiento multidisciplinar a través de una actividad que involucra conceptos y métodos de diferentes áreas.
- La modelización dota de un sentido práctico a la matemática, aumentando la motivación del estudiante hacia la misma.
- El modelado o modelización es una actividad creativa que desarrolla entre otras las siguientes competencias en el estudiante:
 1. Interacción con el mundo físico
 2. Búsqueda y tratamiento de la información
 3. Autonomía e iniciativa personal
 4. Desarrollo del espíritu crítico
 5. Aplicación de procesos matemáticos a situaciones cotidianas.
 6. Trabajo en equipo

Etc.

GEOMETRÍA FRACTAL



B. Mandelbrot



FRACTINT

En los años 70, el matemático Benoit Mandelbrot acuña el término *fractal* procedente del latín *fractus* que significa roto, fragmentado o irregular, y desarrolla la geometría fractal.

La geometría fractal sirven para estudiar las formas, aparentemente caóticas, (nubes, costas, ramas de los árboles,) que no se ajustan a la geometría euclídea.

La definición de fractal debida a Mandelbrot es la siguiente:

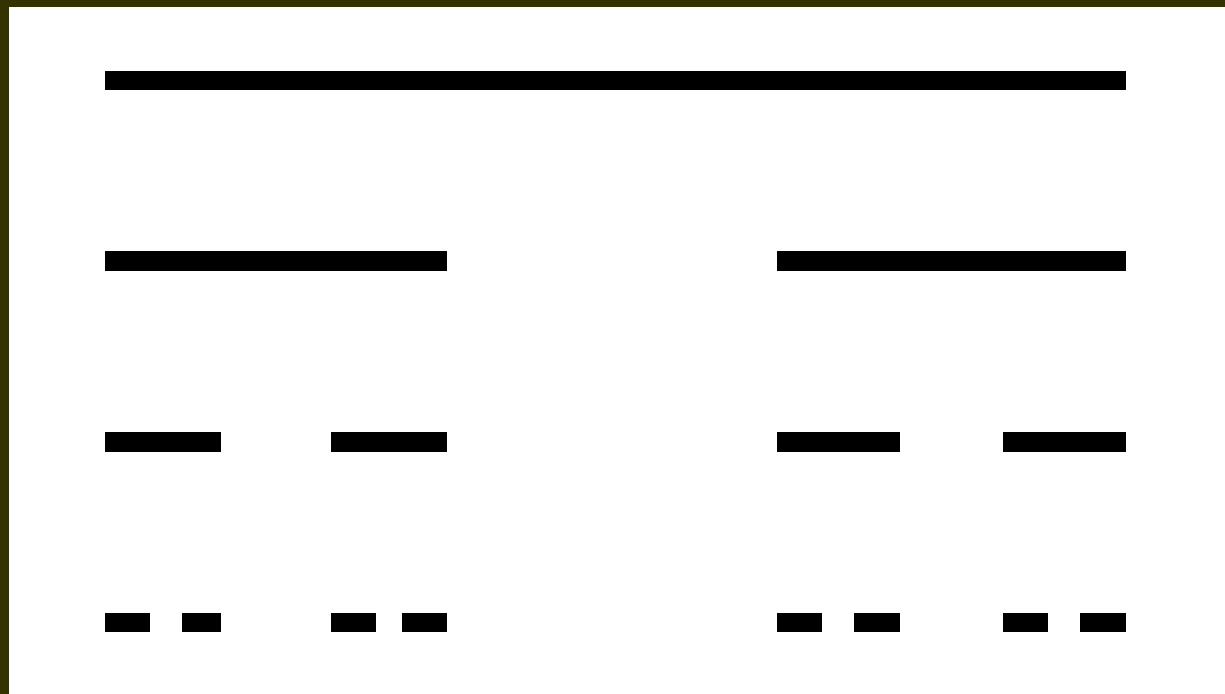
“Un fractal es un tipo de objeto geométrico fragmentado, que puede ser subdividido en partes, cada una de las cuales es aproximadamente una copia reducida del total”.

La propiedad característica de un fractal es la *autosemejanza*, es decir, una pequeña parte de un fractal es una réplica a menor escala de la totalidad.

EUCLÍDEA	FRACTAL
Tradicional (más de 2000 años)	Moderna (aprox. 30 años)
Trata objetos creados por el hombre	Apropiada para formas naturales
Dimensión entera	Dimensión fraccionaria
Descrita por fórmulas y ecuaciones	Algoritmo recursivo (iteración)

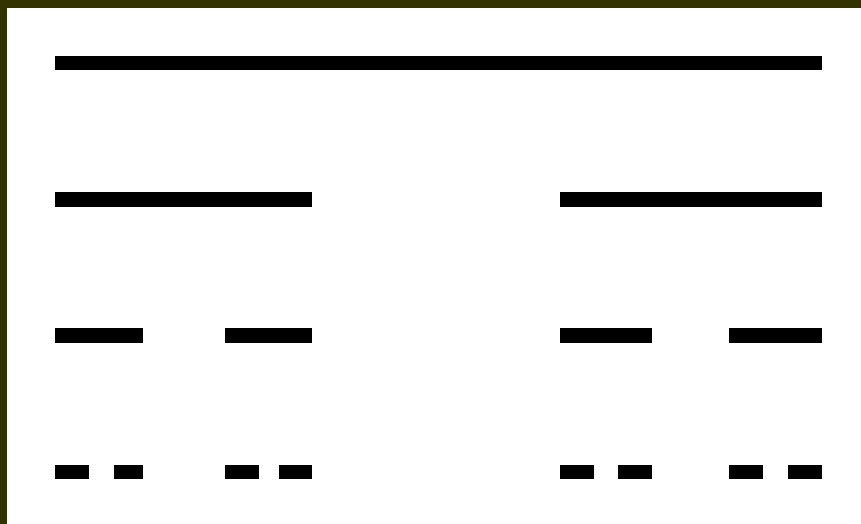
1.- Conjunto de Cantor (1883)

Tal vez este es el primer objeto fractal de la historia de la matemática. Su construcción es sencilla, a partir de un segmento se extrae la tercera parte central y se repite el proceso, indefinidamente, en los dos segmentos resultantes.



En cada iteración el conjunto de Cantor se compone de dos segmentos de

longitud $\frac{1}{3}$ del anterior, es decir, $L = \frac{1}{3}$ y $N(L) = 2$



¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso cero?

¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso primero?

¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso segundo?

¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso tercero?

¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso n-ésimo?

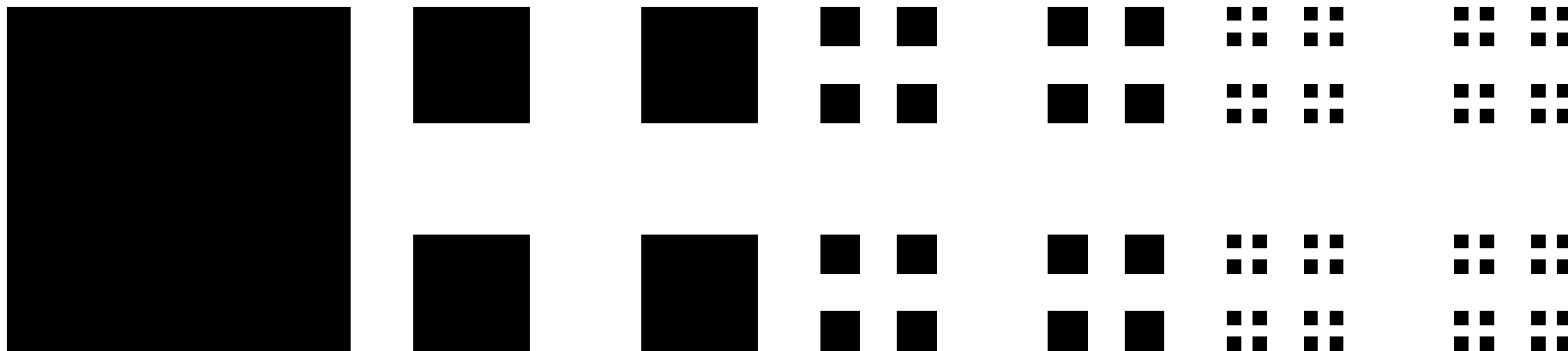
¿Cuál es la longitud del conjunto cuando n se hace muy grande?

CONJUNTO DE CANTOR			
Iteración	Nº de segmentos	Longitud de cada segmento	Longitud del Conjunto CANTOR
0	2^0	$\frac{1}{3^0}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$
1	2^1	$\frac{1}{3^1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$
2	2^2	$\frac{1}{3^2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$
...	...	...	...
n	2^n	$\frac{1}{3^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

La longitud del conjunto es: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

2.- Cuadrado de Cantor

Se llama así al fractal obtenido tomando un cuadrado como punto de partida y dividiendo cada lado en tres partes iguales, para considerar los cuatro cuadrados de las esquinas y reiterar el proceso sucesivamente en cada nuevo cuadrado.



¿Cuál es el área del conjunto en el paso cero?

¿Cuál es el área del conjunto en el paso primero?

¿Cuál es el área del conjunto en el paso segundo?

¿Cuál es el área del conjunto en el paso tercero?

¿Cuál es el área del conjunto en el paso n-ésimo?

¿Cuál es el área del conjunto cuando n se hace muy grande?

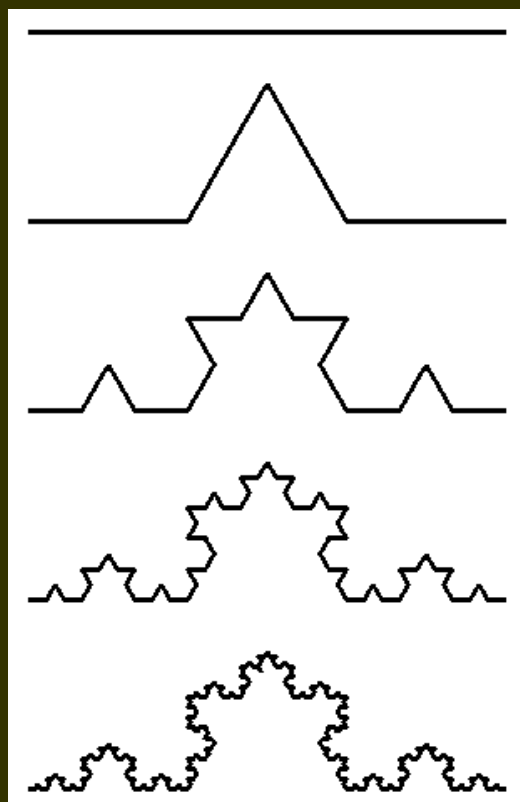
CUADRADO DE CANTOR

Iteración	Nº de Cuadrados	Longitud del lado y área de cada cuadrado		Área Conjunto CANTOR
0	2^0	$\frac{1}{3^0}$	$\frac{1}{3^0}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$
1	2^2	$\frac{1}{3^1}$	$\frac{1}{3^2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$
2	2^4	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^4}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$
...	...	...		...
n	2^{2n}	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{1}{3^{2n}}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$

3.- Curva de Koch (1904)

Esta curva se obtiene tomando un segmento que se divide en tres partes y sustituyendo la parte central por dos segmentos de la misma longitud formando un ángulo de 60° . A continuación se repite el proceso hasta el infinito, sobre cada uno de los segmentos.

Cualquier segmento de curva consta de cuatro fragmentos escalados a razón de $\frac{1}{3}$ respecto a su generador.



¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso cero?

¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso primero?

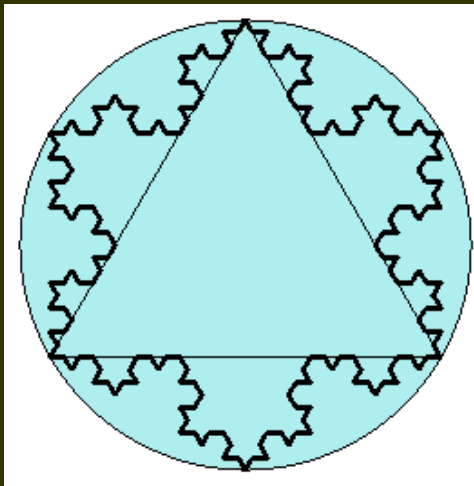
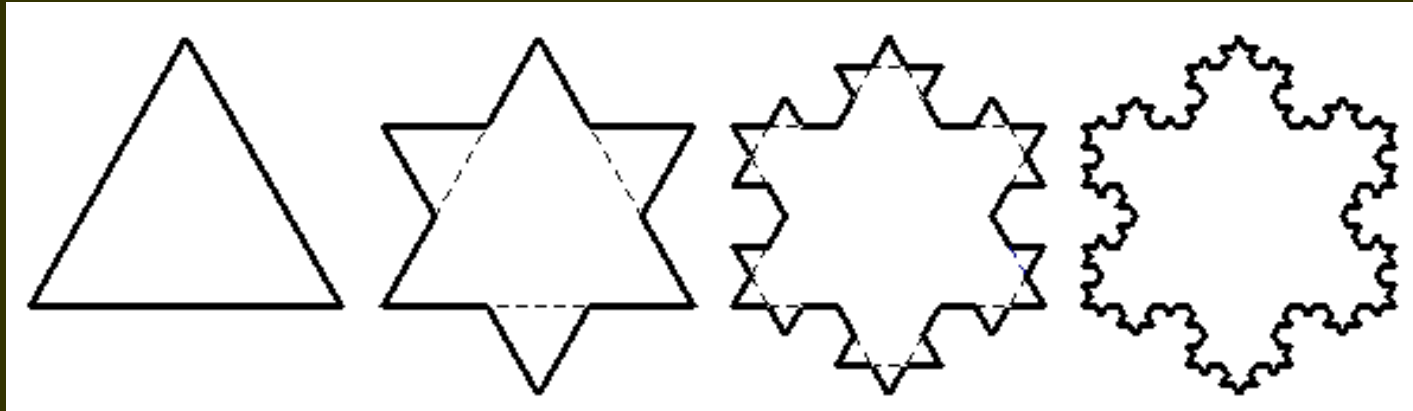
¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso segundo?

¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso tercero?

¿Cuál es la longitud del conjunto en el paso n -ésimo?

¿Cuál es la longitud del conjunto cuando n se hace muy grande?

Si la iteración anterior se realiza sobre los tres lados de un triángulo equilátero se obtiene la figura fractal conocida como *Copo de Koch*, el nombre de copo se debe al parecido con la representación de un copo de nieve.



El círculo circunscrito al triángulo equilátero inicial coincide con el que circunda al copo de Koch, lo que pone de manifiesto que el área que encierra es finita.

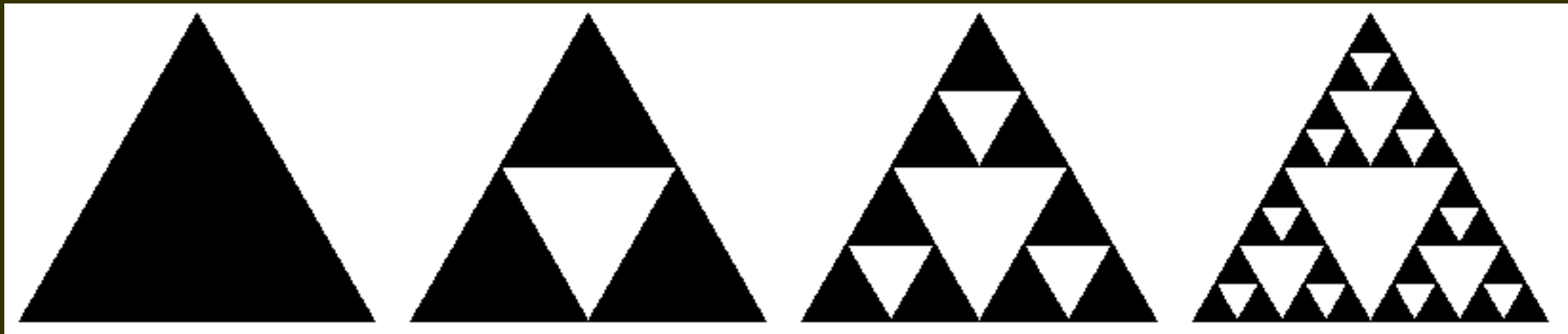
En la n -ésima iteración la longitud de la curva de Koch es:

$$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Por tanto la longitud del copo en el límite es infinito.

4.- Triángulo de Sierpinski

En el año 1915 el matemático polaco W. Sierpinski creó este nuevo objeto fractal tomando como base un triángulo equilátero dividido en cuatro triángulos iguales entre sí de lado la mitad del inicial y prescindiendo del triángulo invertido respecto al primero. Como es habitual en la generación de fractales el proceso se itera hasta el infinito.

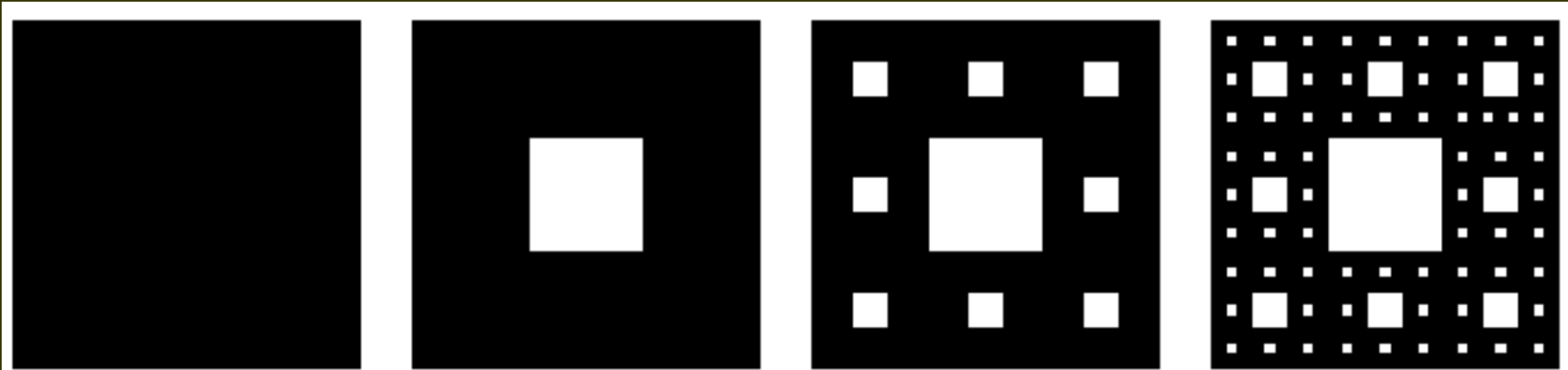


- ¿Cuál es el área del conjunto en el paso cero?
- ¿Cuál es el área del conjunto en el paso primero?
- ¿Cuál es el área del conjunto en el paso segundo?
- ¿Cuál es el área del conjunto en el paso tercero?
- ¿Cuál es el área del conjunto en el paso n -ésimo?
- ¿Cuál es el área del conjunto cuando n se hace muy grande?

5.- Alfombra de Sierpinski

Tomando ahora un cuadrado, cuyo lado se divide en tres partes iguales, se origina una partición en nueve cuadrados con lado la tercera parte del inicial, a continuación se elimina el cuadrado central. El proceso se repite infinitas veces obteniéndose el fractal.

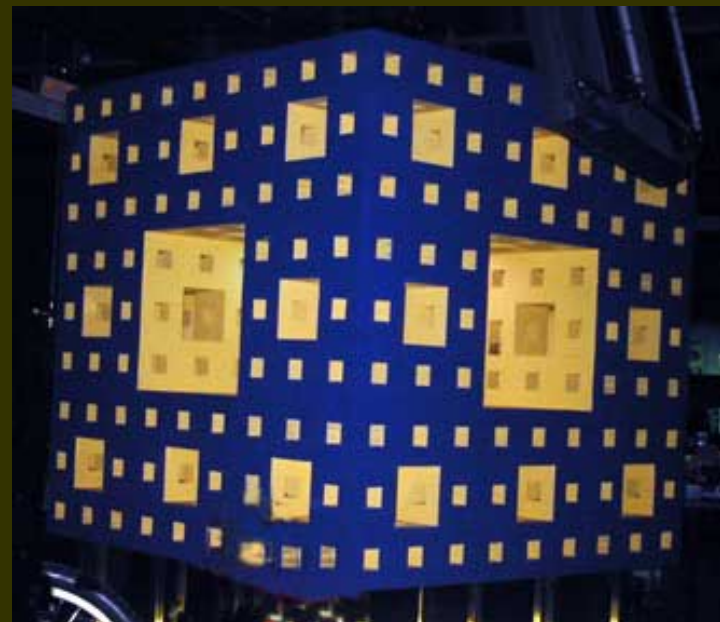
Área finita (menor que la del cuadrado de partida) y perímetro infinito.



6.- Esponja de Menger

Es la versión tridimensional de la alfombra de Sierpinski, este fractal fue creado por Kart Menger en 1926. La obtención se realiza a partir de un cubo dividido en veintisiete cubos iguales, eliminando el que queda en el núcleo central y los que están en el centro de cada cara del cubo, se itera el proceso indefinidamente en cada uno de los restantes cubos. La fotografía corresponde a la escultura matemática erigida en 2003 en memoria del matemático Luis Santaló y depositada en el Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología de Las Palmas de Gran Canaria.

El conjunto de Cantor, la alfombra de Sierpinski y la esponja de Menger, comparten la misma regla de división en tres partes iguales de: un segmento, lado de un cuadrado y lado de un cubo, respectivamente.



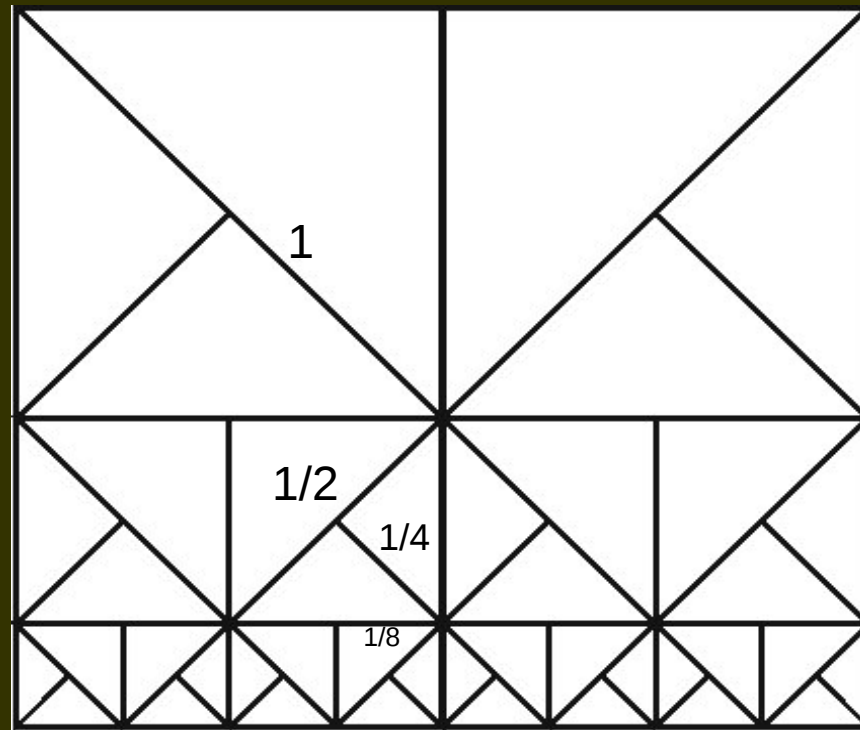
Esponja de Menger

Iteración	Nº de Cubos	Longitud del lado de los cubos	Volumen
0	1	$\frac{1}{3^0}$	1
1	20	$\frac{1}{3^1}$	$20 \frac{1}{3^3}$
2	20^2	$\frac{1}{3^2}$	$20^2 \frac{1}{3^6}$
...	...	...	...
n	20^n	$\frac{1}{3^n}$	$20^n \frac{1}{3^{3n}}$

En la entrada de una sinagoga judía de Praga encontramos este conjunto de seis estrellas de David trazadas, cada una de ellas sobre las puntas de otra estrella semejante a mayor escala.

En la figura se ha realizado un esquema de tres iteraciones de esta construcción que no se corresponde a ninguno de los fractales con nombre propio. Sin duda el proceso repetido indefinidamente origina un objeto fractal.





Los lados de los cuadrados forman una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$$

Sus áreas una progresión geométrica de razón $\frac{1}{4}$.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{4^n}$$

e-mails

Inmaculada Fernández Benito iferna3@platea.pntic.mec.es

Encarnación Reyes Iglesias ereyes@maf.uva.es