

# PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

## Estímulo del talento matemático



### Prueba de selección 3 de junio de 2017

Nombre:.....  
Apellidos:.....  
Fecha de nacimiento:.....  
Teléfonos:.....

---

### Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

#### DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

**No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.**

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

**Tienes dos horas y media en total.** No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

**Te deseamos mucho éxito.**



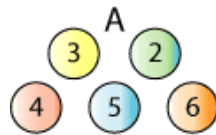
Real Academia de Ciencias  
Exactas, Físicas y Naturales



# 1. JUEGO CON BOLAS



Tenemos una bolsa **A** de bolas numeradas que empleamos para un juego:



Para jugar, las bolas se mezclan y se eligen dos al azar. Por ejemplo:

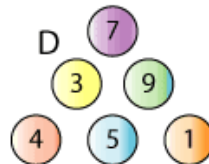
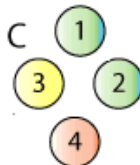
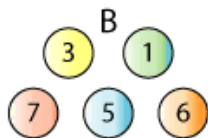


Luego se suman los números de las dos bolas elegidas:  $4+5=9$

**Si la suma es par, ganas. Si es impar, pierdes.**

a) Un juego se dice que es **justo** si el número de parejas que te hacen ganar es el mismo que el número de parejas que te hacen perder. ¿Puedes justificar si el juego con la bolsa A es justo o no?

Tenemos ahora tres nuevas bolsas de bolas: B, C y D:



b) Ahora te dejan escoger entre las bolsas B, C y D, pero sólo de una bolsa. En cada caso (dependiendo de la bolsa elegida) haz el recuento de cuántas parejas de números puedes extraer y cuántas de ellas te hacen ganar. A la vista de tus cálculos, explica cuál de las tres bolsas escogerías para que tu posibilidad de ganar sea la mayor posible.

c) Encuentra, si es posible hacerlo, una bolsa con bolas numeradas que diese lugar a un juego justo. Explica tu respuesta.

d) ¿Sería posible construir una bolsa con 10 bolas numeradas que diera lugar a un juego justo? Explica tu respuesta.

## 2. EL PALACIO DE LAS HADAS



Las hadas viven en un palacio que tiene muchos pisos numerados así:  
1,2,3,4,5.....

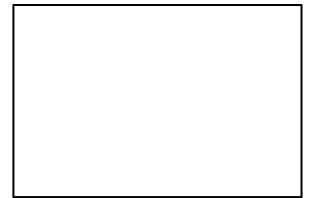
Para ir de un piso a otro piso hay que utilizar una varita mágica y en cada piso hay dos varitas mágicas, una es roja y la otra es azul.

Si tocas la varita mágica roja puedes ir 10 pisos más arriba o 10 pisos más abajo. Por ejemplo, si estás en el piso 37 y tocas la varita roja puedes ir al piso 47 o al piso 27.

También puedes tocar la varita azul. Si la tocas, puedes subir a otro piso que es el triple del piso que estás más uno, por ejemplo, si estás en el piso 5 puedes ir al piso  $16=3.5+1$ . También puedes moverte en sentido contrario, por ejemplo, si estás en el piso 13 podrías ir a la 4 porque  $13=3.4+1$ .

- a) El hada del Bosque vive en el piso 1. ¿Crees que podría llegar al piso 13? ¿Podría ir al piso 40? Y ¿al piso 93? Y ¿al piso 57? Si puede llegar a uno de estos pisos explica qué varitas ha tocado y en qué orden. Si crees que no puede llegar explica por qué.
- b) ¿Podrías decir alguna propiedad que cumplan los números de todos los pisos a los que puede llegar el hada del Bosque?
- c) El hada de la Luna vive en la planta 2. Describe cómo puede llegar el hada de la Luna a la planta 57.
- d) El hada del Agua vive en el piso 18. Utilizando la varita roja y la varita azul, ¿podría llegar el hada del Agua al piso 5?
- e) ¿Coinciden dos de estas tres hadas en algún piso? Si piensas que **SÍ** dinos el piso, cuáles son las hadas que coinciden en él y como llegarían. Si piensas que **NO** escribe una justificación.

### 3. EMBALDOSANDO UNA PARED



7 m

3 m

Queremos embaldosar una pared utilizando exclusivamente baldosas cuadradas que sean de longitudes enteras, no necesariamente de igual lado y con el mínimo número total de ellas.

Si la pared es rectangular de 3 m por 7 m, el número mínimo total en este caso sería de 5 losas cuadradas, ya que necesitaríamos 2 baldosas de lado 3 m y 3 azulejos de lado 1 m. Un posible diseño sería el que se muestra en la figura de arriba, aunque hay otros más.

- a) Si ahora queremos embaldosar una pared rectangular de 8 m por 5 m, con el mismo criterio anterior, ¿cuántas baldosas cuadradas necesitarías en total y de qué tamaño? **Dibuja algún diseño con ellas como ejemplo.**



- b) Con sólo baldosas cuadradas de lados 2 m, 4 m y 6 m, ¿cuántas baldosas cuadradas necesitarías en total y de qué tamaño para embaldosar una pared de 22 m por 6 m? **Dibuja algún diseño con el número de baldosas encontrado.**



- c) Si ahora la pared es cuadrada de lado 9 m, y sólo disponemos de baldosas cuadradas de lado 1, 2, 4, 5 y 7 m, podemos encontrar ese número mínimo de dos formas distintas. **Encuéntralas y realiza un diseño con cada una de estas dos posibilidades.**

- d) Ahora podemos usar baldosas cuadradas de lados enteros y de lados decimales con el 5 como único decimal, por ejemplo: 0,5, 1,5, 2,5, ....., 15,5, 16, 5. Si disponemos de una pared de 371,25 m<sup>2</sup>, y para enlosarla usamos como la mayor baldosa, una sola baldosa cuadrada de 16,5 m de lado, ¿cuál sería la mínima distribución de baldosas que permitirían realizarlo?

#### 4. INTERCAMBIO DE CIFRAS



a) Escribe en orden todos los números que se pueden obtener con todas las cifras del número 123. Fíjate en cada uno de ellos y señala los que con un simple intercambio de dos cifras permiten obtener el número 123.

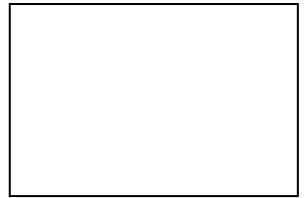
b) Escribe ordenadamente todos los números que se pueden obtener con todas las cifras del número 1234. ¿Cuántos son? Fíjate en cada uno de ellos y señala los que con un simple intercambio de dos cifras permiten obtener el número 1234. ¿Cuántos son?

c) ¿Realmente necesitas escribirlos todos los números para poder responder a la última cuestión de los dos apartados anteriores? Sin escribirlos todos ¿Cuántos números se podrán obtener con todas las cifras del número 12345? ¿Cuántos de ellos permiten con un simple cambio de dos cifras obtener el número 12345? Explica tu respuesta.

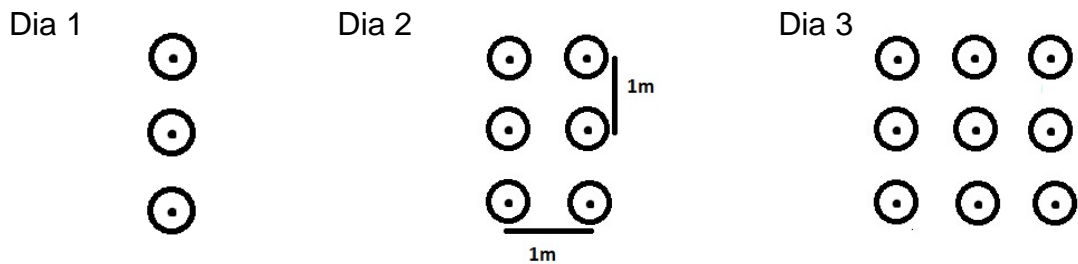
d) ¿Cuáles de los números del apartado b) son los que requieren exactamente dos intercambios de dos cifras para obtener el número 1234? ¿Y tres de dichos intercambios? ¿Alguno de ellos requiere más de tres intercambios?

## 5. SEMBRANDO SEMILLAS

Un agricultor se dispone a sembrar semillas de patatas en su terreno.



1. El primer día, el agricultor siembra tres semillas en línea recta separadas 1 metro entre cada dos consecutivas. El segundo día, vuelve a sembrar otras tres semillas en una línea paralela a la anterior a distancia 1 metro y también a distancia 1 metro entre cada nueva semilla. El tercer día también planta tres semillas con las mismas condiciones. En las siguientes figuras se muestra como lo está haciendo:



- ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?
  - ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?
  - Llamamos orden de una semilla como al número de cuadrados que tienen alguno de sus vértices en dicha semilla. ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas?
  - ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?
2. El agricultor sigue cultivando tres semillas cada día con la misma distribución anterior. Tras la siembra del **cuarto día**,
- ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?
  - ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?
  - ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas?
  - ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?
3. Si han pasado **6 días**, responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas
- ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?
  - ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?
  - ¿Cuál es el orden de cada una de estas semillas?
  - ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?
  -
4. Si han pasado **100 días**, responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas:
- ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?
  - ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?
  - ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?