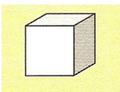
POLIMINÓS Y POLICUBOS

Cecilia Valero Revenga
Colabora: Ana Cubas Pernía

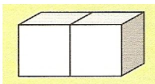
INTRODUCCIÓN

Leamos la siguiente actividad:

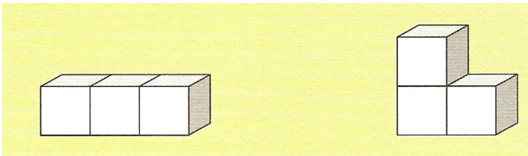
Un policubo es un sólido macizo que se obtiene al pegar por sus caras cubos unitarios. El orden de un policubo es el número de cubos necesarios para formarlo. A continuación se muestran todos los policubos de órdenes 1, 2 y 3.



Orden 1



Orden 2



Orden 3

a) ¿Sabrías decir cuántos policubos de orden 4 hay? Dibuja todos los policubos de orden 4.

b) Dibuja dos descomposiciones distintas de los policubos de orden cuatro que necesitas para construir la figura 1 siguiente.

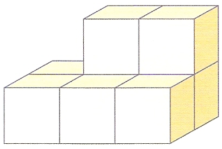


Figura 1

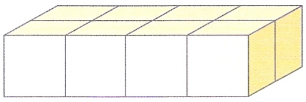


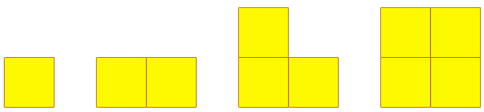
Figura 2

c) Utilizando policubos de orden cuatro, sin repetir ninguno, ¿se pueden recubrir todas las caras de la figura 2 superior? Razona la respuesta.

¿Dónde nos hemos encontrado con este problema antes?

Al final de la sesión de hoy, habremos resuelto este y otros ejercicios donde las figuras básicas son poliminós y policubos.

Se llaman **poliminós** a las formas que se obtienen juntando cuadrados lado a lado. Llamaremos dominós, triminós, tetraminós, ... a los poliminós obtenidos juntando dos, tres, cuatro, ... cuadrados respectivamente.



monominó dominó triminó tetraminó

Un dato interesante. Desde que en 1954, los poliminós fueron presentados al mundo matemático por Solomon W. Golomb hasta hoy se han publicado centenares de problemas y configuraciones. Por ejemplo Martin Gardner en dos de sus libros, *Nuevos pasatiempos matemáticos* y *Festival mágico matemático*, desarrolla actividades muy interesantes.

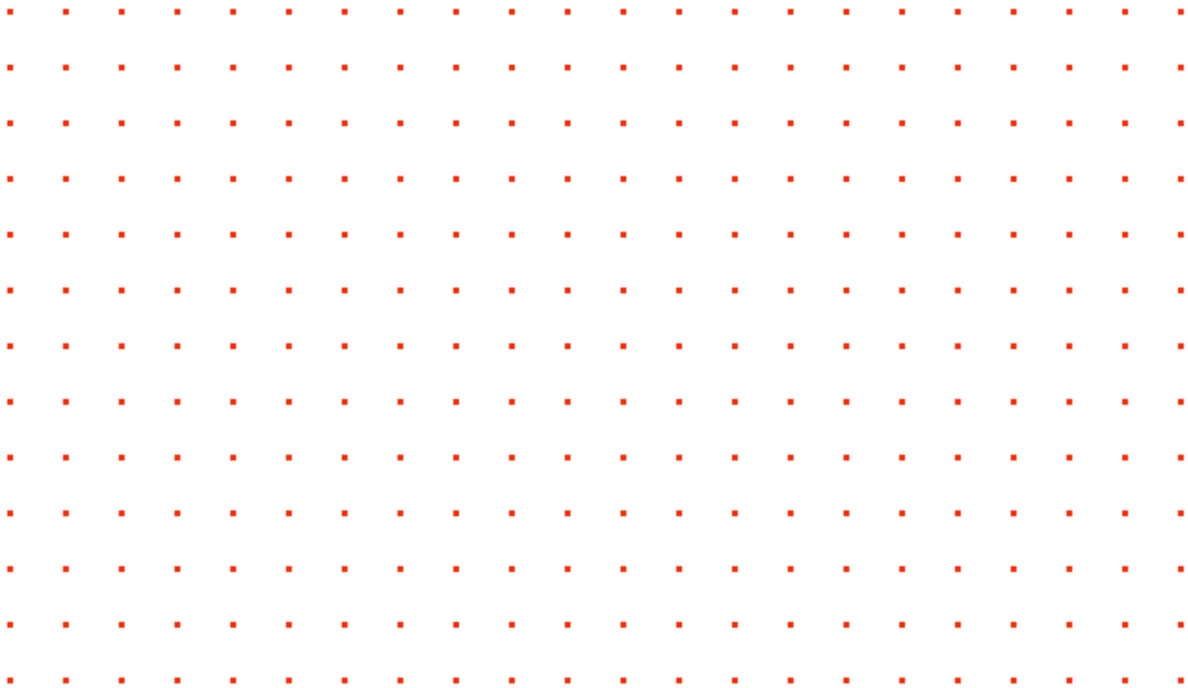
Los **policubos** son, salvando distancias, el equivalente en el espacio a los poliminós en el plano. Son pues, como se ha dicho más arriba, las figuras que se obtienen juntando cubos por una cara común a ambos.

POLIMINÓS

Actividad 1. Trabajando con tetraminós

1.1. ¿Qué es un tetraminó?

1.2. Usa la siguiente trama para dibujar todos los tetraminós que consideres distintos.

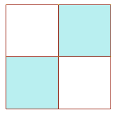


¿Cuántos has dibujado?

Si recortases las figuras dibujadas, ¿podrías superponer alguna encima de otra de manera que coincidiesen exactamente?

¿Cuántos tetraminós distintos hay entonces?

1.3. Dibuja los tetraminós que se consideran realmente distintos y colorea cada uno de ellos con dos colores, alternándolos. Ejemplo:



Clasifica los tetraminós en pares e impares según el número (par o impar) de cuadrados coloreados con el mismo color. ¿Cuántos hay de cada tipo?

Fíjate en los siguientes rectángulos. ¿Habrá alguna posibilidad de construir el de la figura 1 usando dos tetraminós distintos? ¿Y de construir el de la figura 2 utilizando una familia completa de tetraminós distintos?

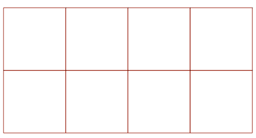


Figura 1

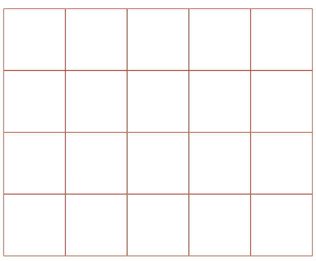
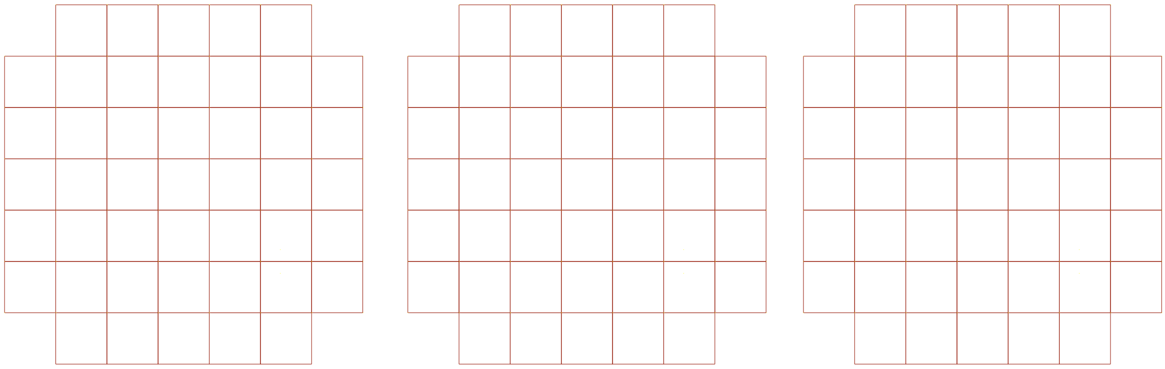


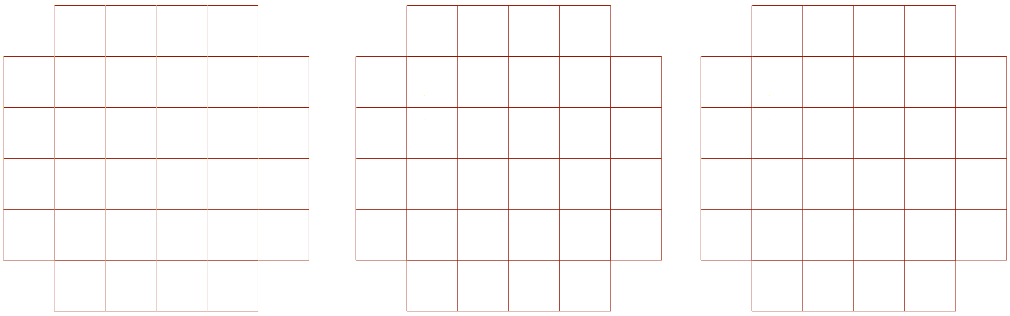
Figura 2

1.4. Nombremos los tetraminós por el parecido que tienen con determinadas letras: I, L, T, O, S. Imagina que tienes un montón de L-tetraminós, todos los que te hagan falta.

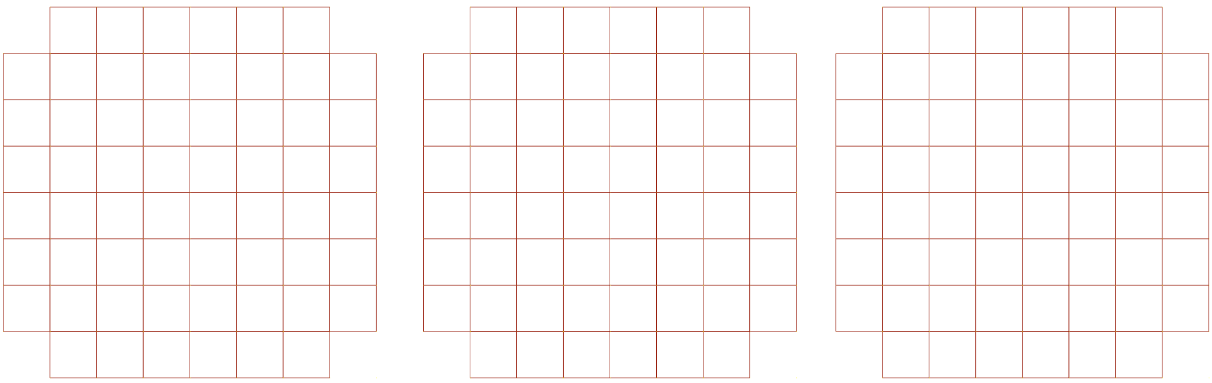
1.4.1. A continuación se muestran diferentes tableros cuadriculados en los que se han cortado las cuatro esquinas. ¿Cuál o cuáles de ellos se pueden recubrir completamente con L-tetraminós? Cuando sea factible, dibuja un posible recubrimiento. Cuando no, da una razón que justifique tu respuesta. Tienes varios tableros de cada tamaño por si necesitas hacer varios ensayos.



Tableros 7x7



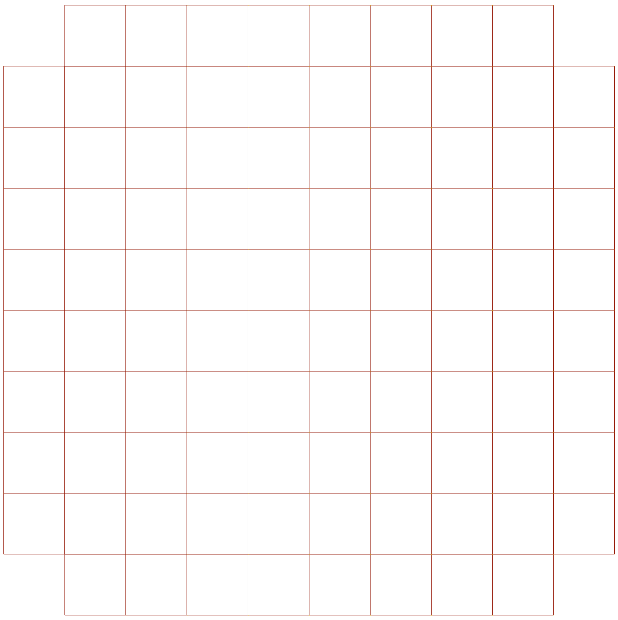
Tableros 6x6



Tablero 8x8

1.4.2. Un tablero n x n con n impar, al que se le han cortado las esquinas, ¿puede ser recubierto por L-tetraminós?

1.4.3. Se considera el siguiente tablero 10 x 10.



Si tuvieras que emparejarlo con alguno de los tableros pares (con un número par de cuadrados) de la página anterior, ¿con quién lo emparejarías? ¿Por qué?

¿Puedes recubrir el tablero anterior con L-tetraminós? ¿Podrías dar una explicación basándote en lo que sabes de otros tableros estudiados anteriormente?

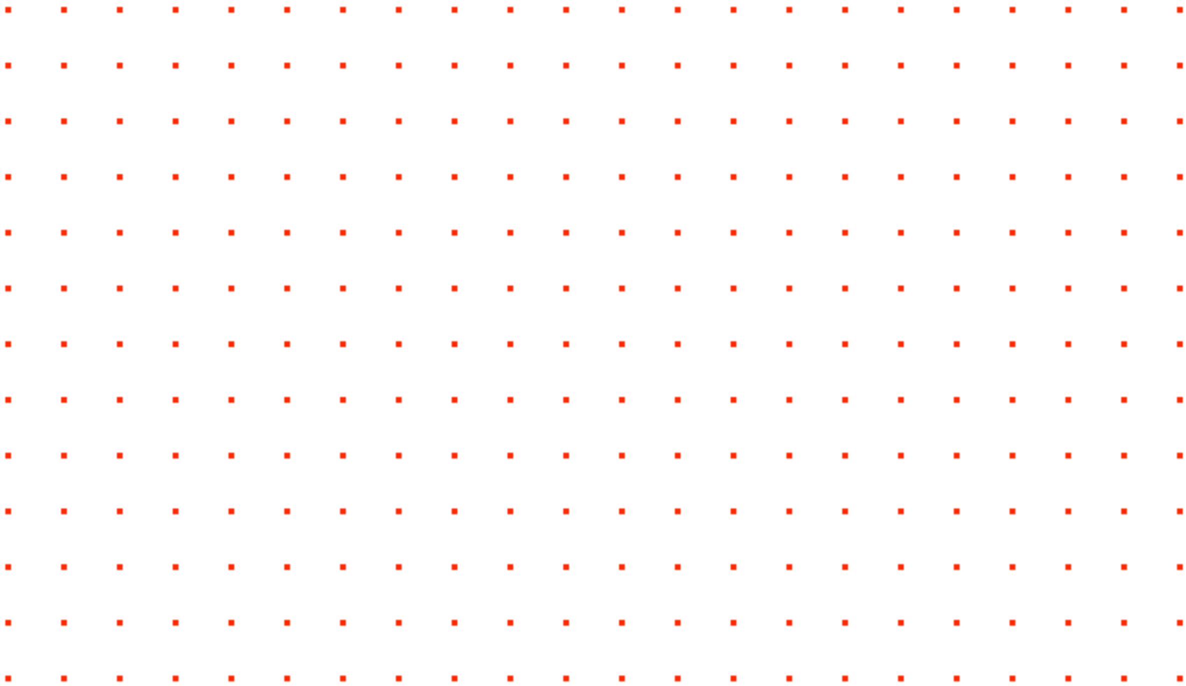
1.4.4. ¿Qué opinas sobre la siguiente afirmación, crees que es verdadera o falsa?

Si n es un número de la forma n = 4·k+2, entonces un tablero n x n al que se le han quitado las cuatro esquinas se puede recubrir por L-tetraminós.

Actividad 2. Trabajando con pentaminós

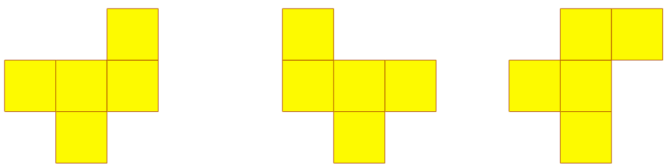
2.1. ¿Qué es un pentaminó?

2.2. Usa la siguiente trama para dibujar todos los pentaminós distintos.



¿Qué criterio has seguido para establecer la igualdad entre dos figuras?

Según el criterio que has establecido, ¿puedes clasificar como iguales los siguientes pentaminós?



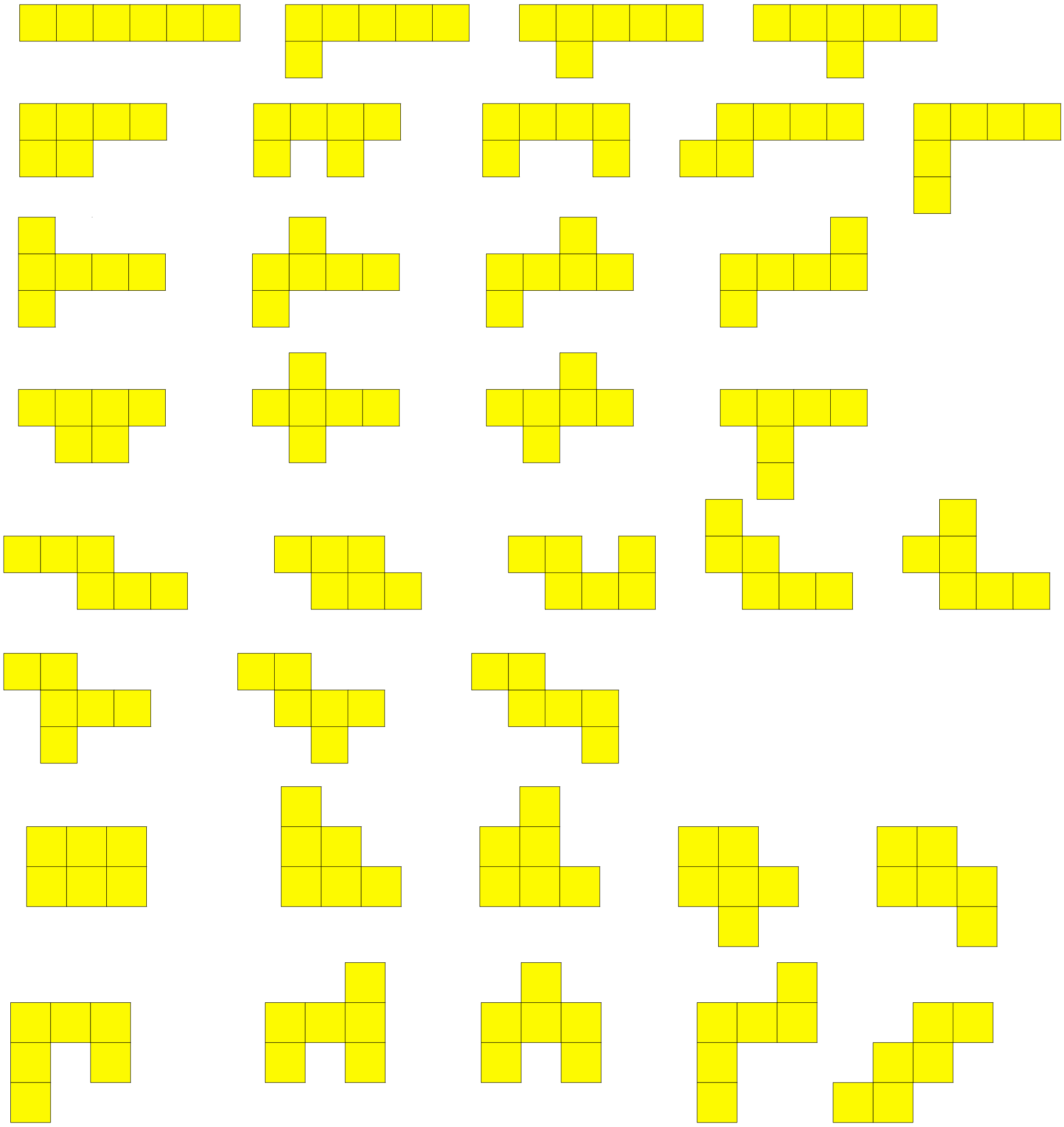
¿Cuántos pentaminós distintos hay?

2.3. Construye rectángulos de diferentes tamaños utilizando todos los pentaminós distintos que hay. Para ello, utiliza la familia completa de pentaminós que se te ha proporcionado y dibuja posteriormente aquí las soluciones que hayas encontrado.

Actividad 3. Trabajando con hexaminós

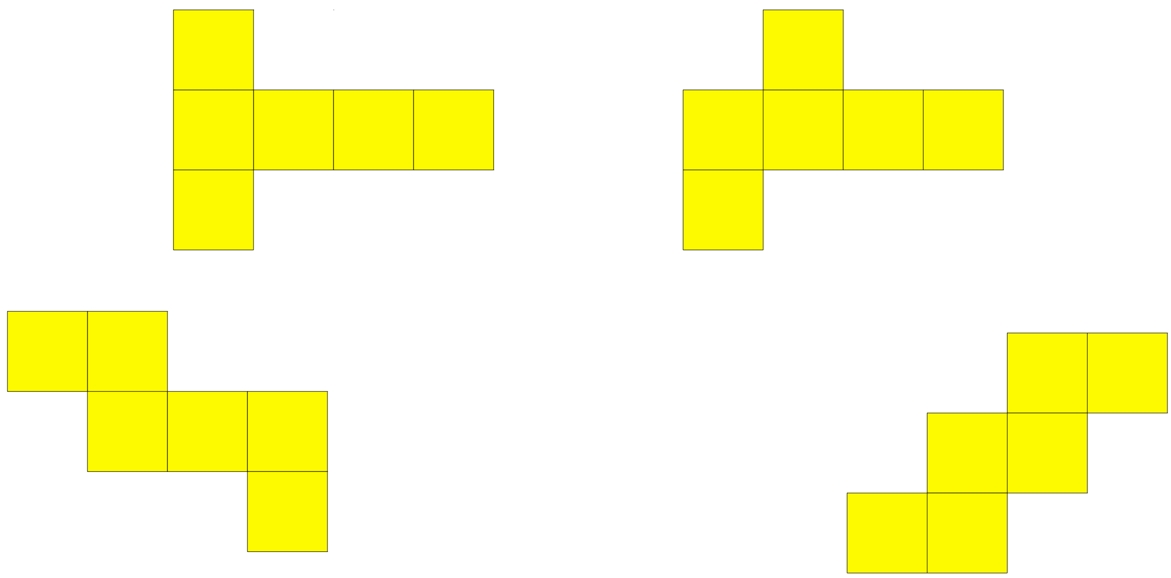
3.1. ¿Qué es un hexaminó?

3.2. A continuación se muestran diferentes hexaminós. Obsérvalos con atención y trata de encontrar la estrategia que se ha seguido para ir construyéndolos. ¿Crees que están todos los hexaminós distintos posibles?



3.3. Numera los hexaminós anteriores y, sin recortar ni pegar, sólo con un cubo y tu imaginación, di cuáles de ellos pueden ser desarrollos planos del cubo. Describe características que te hayan hecho rechazar los hexaminós restantes.

3.4. A continuación se dan diferentes desarrollos del hexaedro cubo. Indica los lados de los polígonos que formarán la misma arista del poliedro.



Para construir a partir de ellos el cubo, has de resolver un problema de tipo práctico: cómo juntar las caras. La técnica habitual es la de añadir al desarrollo lengüetas o pestañas. Tendrá que haber una lengüeta por cada arista resultante en el sólido y que no estuviera ya pegada en el desarrollo. ¿Todos los desarrollos anteriores tienen el mismo número de disposiciones diferentes de lengüetas? ¿Por qué?

POLICUBOS (trabajando en grupos de tres)

En la sección precedente hemos analizado los posibles desarrollos del cubo. Ahora vamos a construir figuras con cubos denominadas policubos. Como en la introducción ya se han descrito los aspectos más elementales de los mismos, vamos a pasar directamente a trabajar con ellos.

Actividad 4. Bicubos, tricubos y tetracubos.

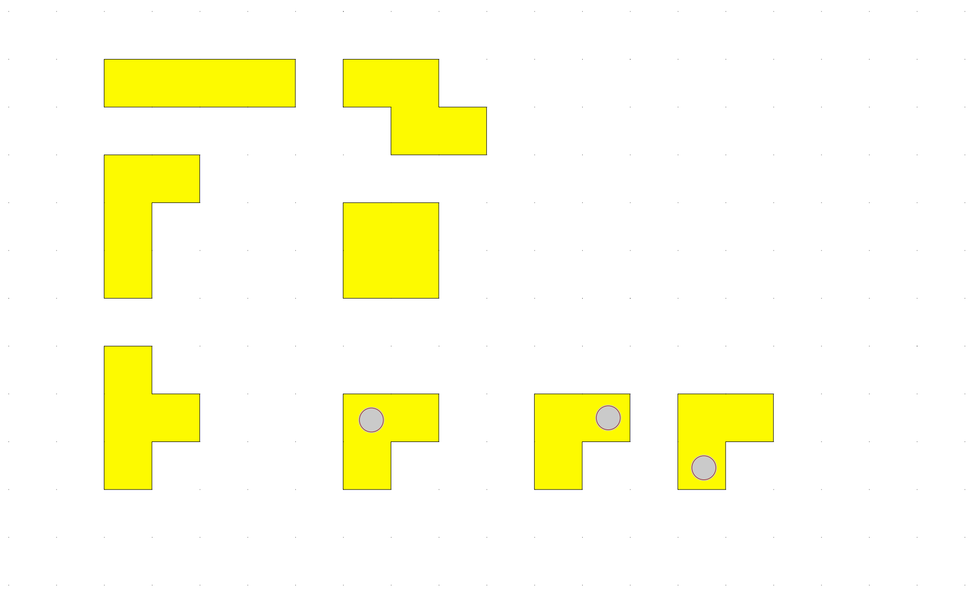
4.1. Utiliza el material que se te ha proporcionado (material Link) para construir todos los bicubos, tricubos y tetracubos posibles. Da a continuación una representación de los mismos (puede ser similar a la dada en el ejercicio de la introducción).

¿Puedes afirmar que hay una correspondencia uno a uno entre bicubos y biminós? ¿Y entre tricubos y triminós? ¿Y entre tetracubos y tetraminós?

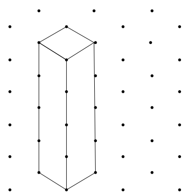
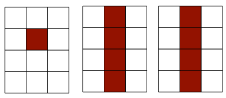
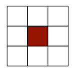
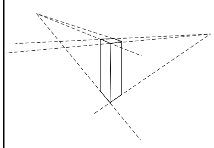
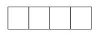
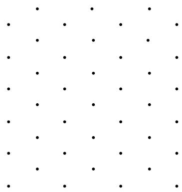
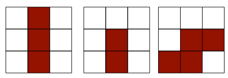
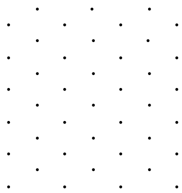
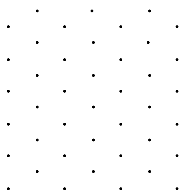
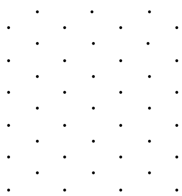
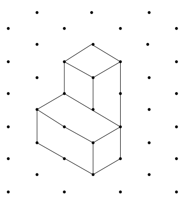
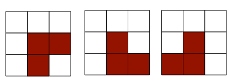
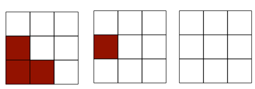
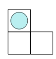
¿Cuál ha sido el criterio que has seguido para decidir cuando dos tetracubos son distintos?

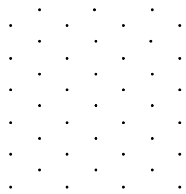
Actividad 5. Diferentes representaciones

Observa las figuras de la cuadrícula mostrada a continuación. ¿Qué dirías que pueden ser?



En la representación anterior aparecen aspectos de carácter personal (otra persona hubiera podido sustituir el ○ por ◊, o por Δ; o bien decir que ○ significa “estar por debajo” si hemos decidido que signifique “estar por encima”,…). Pero hay formas de representación bastante generalizadas, tal y como se muestra en la siguiente tabla, que debes completar, usando en algunos casos la información dada.

	Representaciones				
Tetracubos	ISOMÉTRICA	ORTOGONAL (vistas) Alzado Frente Lado	TOPOGRÁFICA (niveles) 1 2 3 4	PERSPECTIVA	PERSONAL (niveles) ● arriba, ○ detrás, …
			Hay cuatro niveles todos iguales a 		
					
					
					
					
					

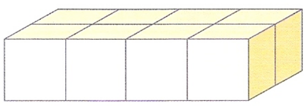
					
					

Para terminar esta actividad, algunos datos curiosos:
- Si intentas construir todos los pentacubos, encontrarás 29 distintos; y so lo que buscas es determinar el número de hexacubos diferentes emplearás un ratito largo de tiempo pues hay 166. (Sloane's A000162; Ball and Coxeter 1987).
- Otro problema que se palntean algunos matemáticos es determinar el número de maneras disitntas de empaquetar todos los policubos de un determinado orden. En el caso de los tetracubos, Beeler probó en 1972 que hay 1390 formas distintas de empaquetar los ocho tetracubos en $2\times4\times4$.

Actividad 6. El último apartado del ejercicio de la introducción

En el enunciado se dice:

> *Utilizando policubos de orden cuatro, sin repetir ninguno, ¿se pueden recubrir todas las caras de la figura siguiente? Razona la respuesta.*



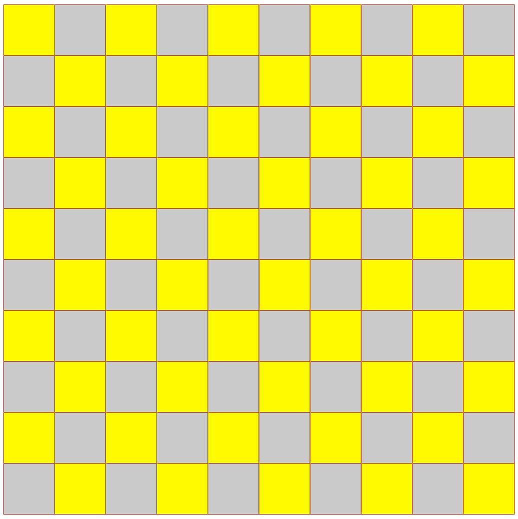
¿Qué entiendes por recubrir?

Resuelve el ejercicio anotando las ideas que se te van ocurriendo. ¡Seguro que tienes muchas teniendo en cuenta todo lo que hemos trabajado!

PARA CASA

CON TETRAMINÓS

1. Un tablero ajedrezado de tamaño 10 × 10, ¿puede ser recubierto por 25 T-tetraminós?



2. Un tablero 10 × 10, ¿puede ser recubierto por 25 I-tetraminós?

Si después de intentarlo no llegas a ninguna conclusión, usa la configuración siguiente y razona sobre el número de cifras iguales que recubrirían los I-tetraminós.

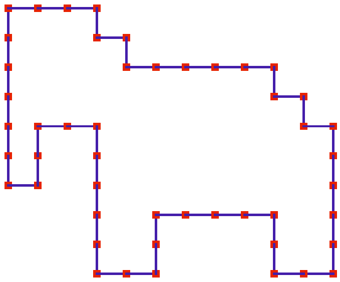
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

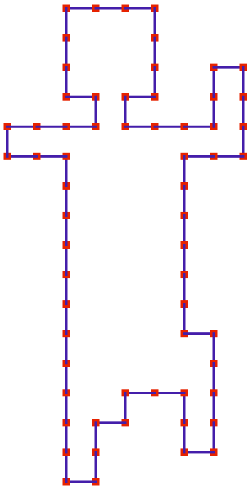
CON PENTAMINÓS

Construye un juego completo de pentaminós, utilizando cartulina o cartón con cuadrados de 2 cm de lado. Pon esmero en esta labor para que las piezas resultantes puedan encajar entre si.

1. Construye rectángulos de diferentes dimensiones usando sólo tres piezas, sólo cuatro piezas, … Dibuja aquí tus soluciones.

2. Con dichas piezas puedes realizar muchas figuras diferentes. Prueba a realizar las siguientes.



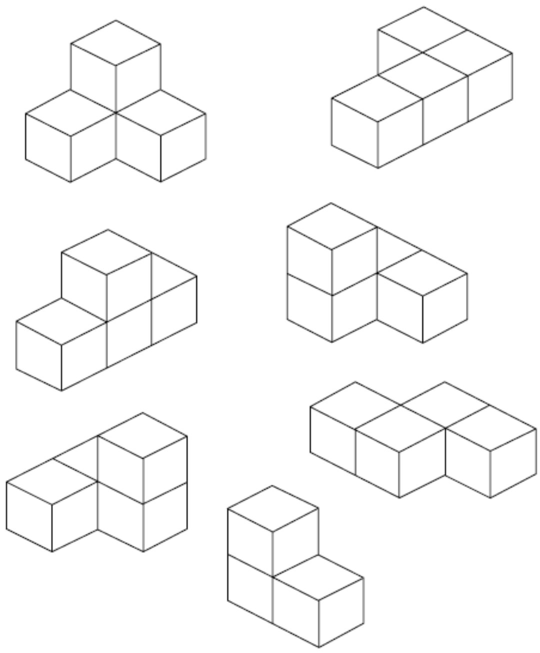


CON HEXAMINÓS

Redacta y resuelve una actividad similar a la 1.3. propuesta para tetraminós.

POLICUBOS

Se trata de que construyas un cubo 3x3x3 con las siete piezas de la figura: CUBO SOMA



¿Te ha resultado difícil realizarlo?

Ahora intenta construirlo de forma distinta, pero para estar seguro de ello, haz primero una representación espacial con los pasos que has seguido en el primer caso.

Intenta diseñar un método de representación plana por "pisos", es decir que te permita saber qué huecos -por pisos- vas cubriendo en cada paso.

REFERENCIAS

- Taller de. Matemáticas. Junta de Extremadura. Consejería de Educación y Juventud. Dirección General de Promoción Educativa. Mérida, 1998. www.edu.juntaex.es/dgpe/pdf/tall_mat.pdf

- Recursos en el aula de matemáticas. Francisco Herrán y Elisa Carrillo. Editorial Síntesis.

- http://mathworld.wolfram.com/Polycube.html

- http://mathworld.wolfram.com/Polyomino.html

- http://www.geocities.com/alclarke0/PolyPages/Polycubes.html

- Problem-Solving Strategies. Arthur Ángel. Springer