# EL ESTILO HEURÍSTICO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Luis Puig

Universidad de Valencia

Cursos de Verano de la Universidad de Cantabria

2ª Olimpiada Matemática Española

LA REAL SOCIEDAD
MATEMATICA ESPAÑOLA

convoca la

SEGUNDA OLIMPIADA
MATEMATICA NACIONAL

entre los

ESTUDIANTES ESPAÑOLES
DE PREUNIVERSITARIO

1965

# PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA SEGUNDA FASE DE LA OLIMPIADA

## PRIMERA SESION

1. Un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de centro 0 y radio igual a 4 cm. se gira un ángulo recto en torno a 0. Hallar el área de la parte común al triángulo dado y al obtenido en ese giro.

2. ¿Cuántos números de tres cifras (es decir, mayores que 99 y menores que 1.000) hay que tengan su cifra central mayor que las otras dos? ¿Cuántos de ellos tienen además las tres cifras distintas?

3. Un disco microsurco gira a velocidad de 33 $^1/_3$ revoluciones por minuto y su audición dura 24 minutos 30 segundos. La parte grabada tiene 29 cm. de diámetro exterior y 11,5 cm. de diámetro interior. Con estos datos, calcular la longitud del surco grabado.

Encontrar un número tal que si se le quita la cifra de las unidades y se coloca delante de las demás, el número resultante es el doble del número original.

$$\overline{x_0 x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1} = 2 \times \overline{x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 x_0}$$

$$2\sum_{i=0}^{n} 10^{i} a_i = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} a_i + 10^{n} a_0$$

$$2a_0 + 2\sum_{i=1}^{n} 10^{i} a_i = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} a_i + 10^{n} a_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2\cdot 10^{i} - 10^{i-1}) a_i = (10^{n}-2) a_0$$

$$19 \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} a_i = (10^{n}-2) a_0$$

99999 ---- 998

$$19 \mid 10^{n}-2$$

$$10^{n} \equiv 2 \ (19)$$

$$n \log_2 10 \equiv \log_2 2 \ (18)$$

$$17n \equiv 1 \ (18)$$

$$n = 17 + 18\lambda$$

$$10^{17}-2 \ \lfloor 19$$

$\boxed{1}$ . . . . . . . . 3 6 8 4 $\boxed{2}$

×2

$\boxed{2}$ 3 6 8 4

El paso $10^n \equiv 2 \pmod{19}$

$$n \log_2 10 = \log_2 2 \pmod{18}$$

Se deriva de

$$\left(\mathbb{Z}_{19}^*, \times\right) \cong \left(\mathbb{Z}_{18}, +\right)$$

$$\underset{a^x}{\overset{\log_a x}{\rightleftarrows}}$$

Los elementos de $\mathbb{Z}_{18}$ hay que interpretarlos como exponentes.

La base hay que elegirla de manera que genere todo $\mathbb{Z}_{19}^*$, es decir, que sea de orden 18.

$$\left(\mathbb{Z}_{19}^{*},\times\right)\cong\left(\mathbb{Z}_{18},+\right)$$

$$\underset{a^{x}}{\overset{\log_a x}{\rightleftarrows}}$$

$$2^{1}=2\rightarrow 1=\log_2 2$$
$$2^{2}=4\rightarrow 2=\log_2 4$$
$$2^{3}=8\rightarrow 3=\log_2 8$$
$$2^{4}=16\rightarrow 4=\log_2 16$$
$$2^{5}=13\rightarrow 5=\log_2 13$$
$$2^{6}=7\rightarrow 6=\log_2 7$$
$$2^{7}=14\rightarrow 7=\log_2 14$$
$$2^{8}=9\rightarrow 8=\log_2 9$$
$$2^{9}=18\rightarrow 9=\log_2 18$$
$$2^{10}=17\rightarrow 10=\log_2 17$$
$$2^{11}=15\rightarrow 11=\log_2 15$$
$$2^{12}=11\rightarrow 12=\log_2 11$$
$$2^{13}=3\rightarrow 13=\log_2 3$$
$$2^{14}=6\rightarrow 14=\log_2 6$$
$$2^{15}=12\rightarrow 15=\log_2 12$$
$$2^{16}=5\rightarrow 16=\log_2 5$$
$$2^{17}=10\rightarrow 17=\log_2 10$$
$$2^{18}=1\rightarrow 0=\log_2 1$$

Por tanto $\log_2 10 = 17$

así que $17n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 18)$

Una solución de esta congruencia ha de ser 17. Esto es un resultado general, ya que 17=18-1 y $(a-1)(a-1)=a^2-2a+1\equiv 1(\text{mód } a)$.

Como 17 y 18 son primos entre sí, las soluciones son $n = 17 + 18\lambda$

$$N = \overline{yx} \qquad N' = \overline{xy}$$

$$10x + y = 2(10y + x)$$

$$8x = 19y$$

$$N = \overline{zyx} \qquad N' = \overline{xzy}$$

$$y + 10z + 100x = 2(x + 10y + 100z)$$

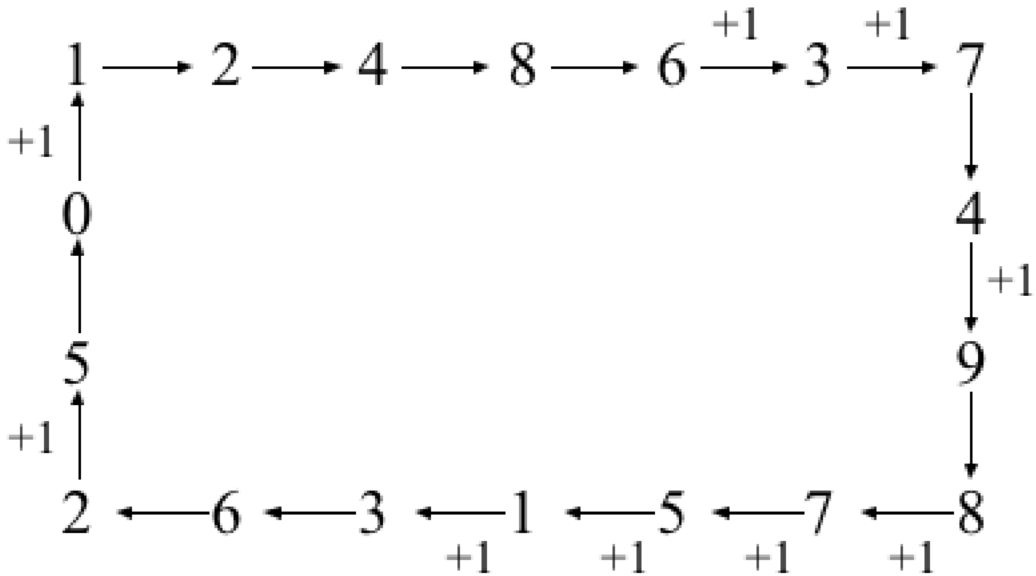
$$y + 10z + 100x = 2x + 20y + 200z$$

$$x = \frac{19y + 190z}{98} = \frac{19(y + 10z)}{98}$$

“He despejado *x* porque me he dado cuenta de que, sabiendo *x*, puedo saber las demás cifras, ya que la cifra de las unidades de *N’(y)* será igual a la cifra de las unidades que resulte de multiplicar 2 por *x*; la cifra de las decenas será igual al producto de 2 por *y* más lo que nos llevemos del producto anterior.”

“En este momento he de tomar una decisión importante, y es continuar por este camino que me ha surgido o seguir con el plan que me había elaborado al principio.”

$$\begin{array}{r} 052631578947368421 \\ \times 2 \\ \hline 105263157894736842 \end{array}$$



## Fases del proceso de resolución (Polya)

- Comprender el problema
- Elaborar el plan
- Ejecutar el plan
    - Herramientas heurísticas
    - Gestión del proceso
- Looking back
- Revisión-extensión

## La fase de revisión-extensión

No se trata de revisar para comprobar la corrección de lo que se ha hecho.

No se trata de generalizar, sino de buscar problemas similares cuya solución pueda encararse

- usando la solución del problema recién resuelto,
- usando parte de la solución,
- o usando una variante de la solución.

La revisión con vistas a la extensión consiste fundamentalmente en el análisis de la solución.

# La fase de revisión-extensión del problema anterior

¿Cuántos resultados?

Hallar todos los resultados.

Cambiar “multiplicar por 2” por “multiplicar por 3”, etc.

Análisis de la solución.

La solución es independiente del cambio de 2 por 3.

El resultado:

0344827586206896551724137931

Pero surgen nuevos hechos:

Cuando es multiplicar por 2, el resultado tiene 18 cifras.
Cuando es multiplicar por 3, el resultado tiene 28 cifras.

Que conducen a enunciar nuevos problemas:

¿Cuántas cifras tendrá el resultado?

Análisis de la solución abandonada:

Cuando es multiplicar por 2, aparece un 19, que proviene de $2\times10-1$.

Cuando es multiplicar por 3, aparece un 29, que proviene de $3\times10-1$.

Cuando es multiplicar por 4, aparece un 39, que proviene de $4\times10-1$.

Pero surgen nuevos hechos:

$$\begin{array}{r} 025641 \\ \times 4 \\ \hline 102564 \end{array}$$

Cuando es multiplicar por 2, el resultado tiene 18 cifras.
Cuando es multiplicar por 3, el resultado tiene 28 cifras.

Cuando es multiplicar por 4, el resultado *no* tiene 38 cifras.

Pero hay más ciclos:

$$\begin{array}{r} 051282 \\ \times 4 \\ \hline 105128 \end{array}$$

¿Cuántos?

El problema que tenemos es hallar todos los números que cumplan la condición del problema inicial, pero variando el número por el que multiplicamos. El plan que utilizaremos para hallarlos consistirá en confeccionar en primer lugar los diagramas correspondientes a cada uno, y a continuación aplicando las condiciones que hemos deducido que deben cumplir las cifras, inmediatamente sabremos que números son.

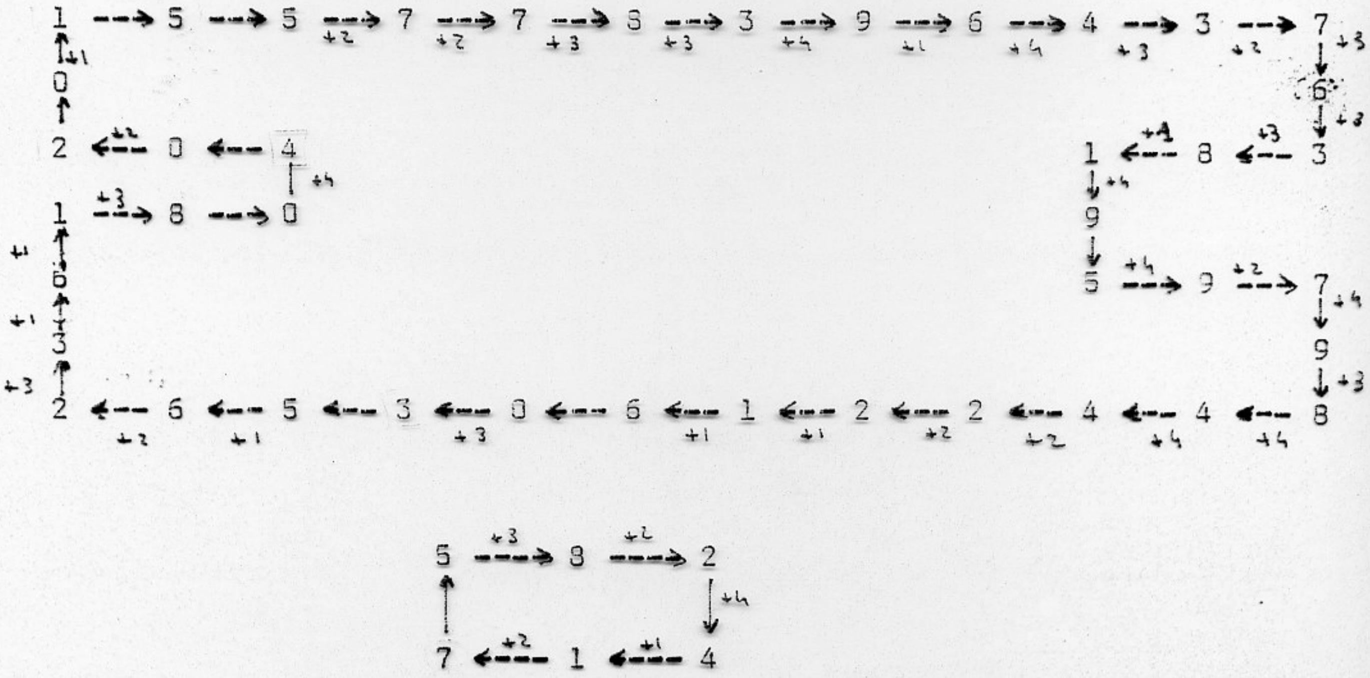
- Ejecución del plan:

a) Como el de duplicar y triplicar ya lo tenemos, empezaremos por <u>cuadriplicar</u>:

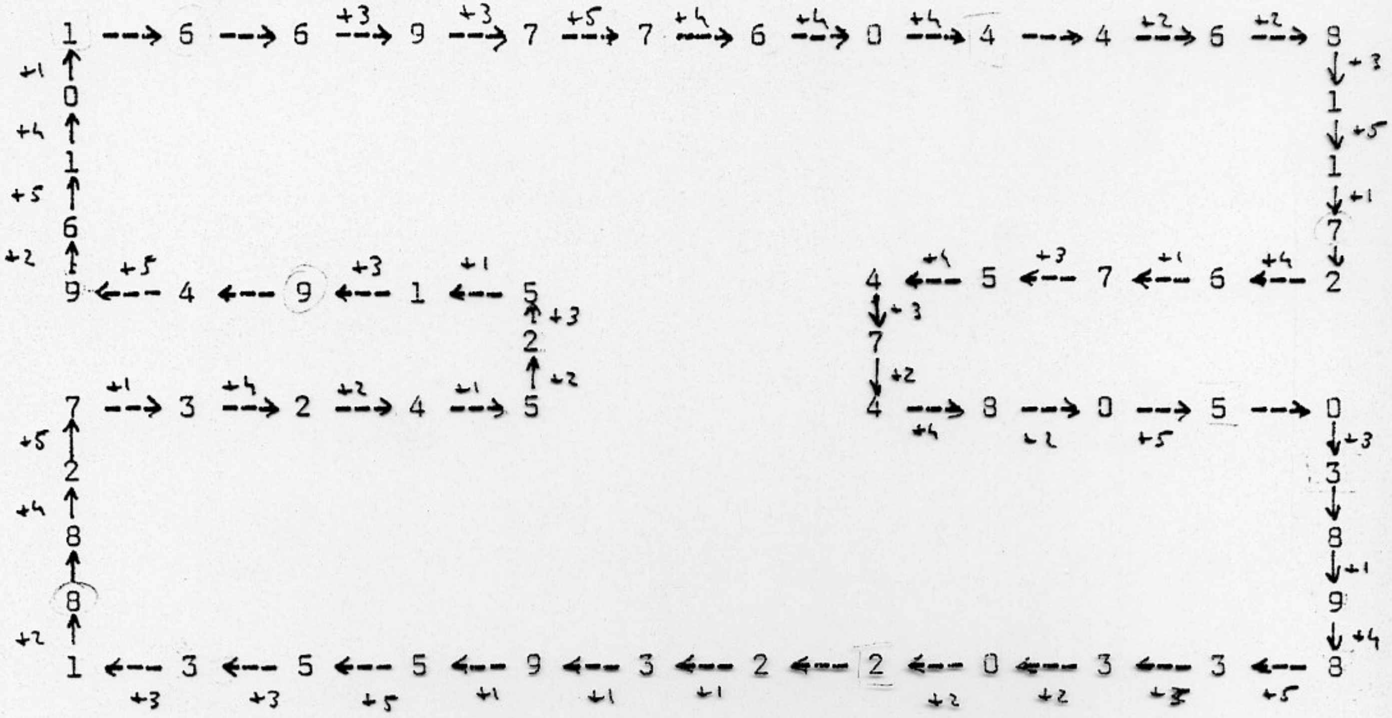
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dashed] & 4 \arrow[r, dashed] & 6 \arrow[d, "+1"] \\
0 \arrow[u, "+1"] & 2 \arrow[l, dashed, "+2"'] & 5 \arrow[l, dashed, "+2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
2 \arrow[r, dashed] & 8 \arrow[r, dashed] & 2 \arrow[d, "+3"] \\
0 \arrow[u, "+2"] & 5 \arrow[l, dashed] & 1 \arrow[l, dashed, "+1"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
3 \arrow[r, dashed] & 2 \arrow[r, dashed, "+1"'] & 9 \arrow[d] \\
0 \arrow[u, "+3"] & 7 \arrow[l, dashed, "+2"'] & 6 \arrow[l, dashed, "+3"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
6 \arrow[r, dashed] & 4 \arrow[r, dashed, "+2"'] & 8 \arrow[d, "+1"] \\
1 \arrow[u, "+2"] & 5 \arrow[l, dashed, "+1"'] & 3 \arrow[l, dashed, "+3"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
7 \arrow[r, dashed] & 8 \arrow[r, dashed] & 4 \arrow[d] \\
1 \arrow[u] & 7 \arrow[l] & 9 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

b) Quintuplicar:



c) Sextuplicar:



d) <u>Septuplicar</u>:

```
1 --> 7 --> 9 --> 7 --> 5 --> 0 --> 4 --> 8 --> 8 --> 1
↑                                                      ↓
0                                                      3
↑                                                      ↓
1 <-- 4 <-- 4 <-- 9 <-- 2 <-- 7 <-- 5 <-- 3 <-- 6 <-- 2


3 --> 1 --> 9 --> 3 --> 7 --> 1 --> 2 --> 5 --> 6 --> 5
↑                                                      ↓
0                                                      9
↑                                                      ↓
4 <-- 3 <-- 4 <-- 7 <-- 8 <-- 2 <-- 6 <-- 0 <-- 8 <-- 6


5 --> 5 --> 8 --> 9 --> 8 --> 2 --> 0 --> 2 --> 4 --> 9
↑                                                      ↓
0 <-- 7 <-- 2 <-- 4 <-- 6 <-- 3 <-- 7 <-- 6            5
                                          ↑            ↓
                                          8 <-- 1 <--  1
```

$$\frac{x_0}{19} = \frac{10x_2 + x_1}{98}$$

$$\frac{x_0}{19} = \frac{100x_3 + 10x_2 + x_1}{998}$$

$$\frac{x_0}{19} = \frac{1000x_4 + 100x_3 + 10x_2 + x_1}{9998}$$

$$\frac{x_0}{19} = \frac{1000x_4 + 100x_3 + 10x_2 + x_1}{9998} =$$

$$= \frac{10000x_4 + 1000x_3 + 100x_2 + 10x_1}{99980} =$$

$$= \frac{10000x_4 + 1000x_3 + 100x_2 + 10x_1 + x_1}{99999} =$$

$$= \frac{\overline{x_4 x_3 x_2 x_1 x_0}}{99999}$$

El resultado es el período de 1/19.

Los resultados son 9: los 9 períodos de 1/19, 2/19, 3/19, 4/19, 5/19, 6/19, 7/19, 8/19 y 9/19, que tienen todos las mismas cifras y en el mismo orden cíclico.

Los problemas anteriores se pueden formular en términos de períodos.

¿Cuántas cifras tiene el período de 1/19?
¿Cuántas cifras tiene el período de 1/29?
¿Cuántas cifras tiene el período de 1/39?
En cuántos ciclos están los períodos de 1/39, 2/39, 3/39, 4/39, 5/39, 6/39, 7/39, 8/39 y 9/39.
Etc.

## Elementos del estilo heurístico de resolución de problemas

Herramientas heurísticas
Gestor del proceso
Destrezas con potencial heurístico

Concepción de la naturaleza de la tarea
No se trata encontrar el resultado, sino de aprender del proceso de resolución.

La fase de revisión-extensión es crucial

PROBLEMA

Aquellos que propugnan una terminología más precisa en las cuestiones estudiadas en geometría, ¡oh excelentísimo Pandosio!, usan el término *problema* en el sentido de una indagación en la que se plantea (*probálletai*) hacer o construir algo, y el término *teorema* en el sentido de una indagación en la que se investigan (*theôreítai*) las consecuencias y las implicaciones necesarias de ciertas hipótesis; pero, entre los antiguos, algunos las describían todas como problemas, y algunos, todas como teoremas (Pappus, *Synagôgê*).

# PROBLEMA

Proclo, *Comentario al libro primero de los Elementos de Euclides*

En los problemas de lo que se trata es precisamente de hacer o de encontrar algo porque existe la posibilidad de que sean de manera distinta a lo que dice el enunciado; así, un ejemplo de problema que pone Proclo –construir un triángulo equilátero sobre una recta dada– es un problema porque sobre una recta también se puede construir un triángulo que no sea equilátero.

“si pedimos inscribir un ángulo recto en un semicírculo, formulando la petición como problema, la consideraremos extraña a la geometría porque todo ángulo inscrito en un semicírculo es recto.”

## ANÁLISIS DEL USO DE UNA HERRAMIENTA HEURÍSTICA

Con el problema de los dos cuadrados hemos examinado el esquema de un proceso de resolución de un problema que está organizado por el uso de la herramienta heurística "considerar un caso (particular)".

Considerar un caso (particular) consiste en:

1. Transformar el problema originalmente planteado en otro problema en el que se pregunta lo mismo, pero ahora sólo sobre un elemento del conjunto del que hablaba el problema original.

2. Resolver el nuevo problema.

# ANÁLISIS DEL USO DE UNA HERRAMIENTA HEURÍSTICA

Una vez resuelto, se tiene su resultado y su solución.

Llamamos "resultado" a lo que contesta a la pregunta del problema (en este caso, ¼ del área del cuadrado).

Llamamos "solución" al conjunto de pasos que conducen desde los datos al resultado (en este caso, el razonamiento que empieza "como los lados del segundo cuadrado son perpendiculares a los del primero, cortan a los lados del primero en el punto medio, por lo que el área vale...")

## ANÁLISIS DEL USO DE UNA HERRAMIENTA HEURÍSTICA

3. Se analiza la solución para ver si es posible llevarse la solución al problema original.
Como en este caso la solución utiliza propiedades que tiene el caso particular, pero no son propiedades del problema original (la perpendicularidad entre los lados de los cuadrados), no se puede usar en el problema original.

4. Como la solución no sirve para el problema original, se toma el resultado como una conjetura para el problema original, con lo que el problema original se transforma en un nuevo problema, que ya no es de encontrar, sino de demostrar: "Demostrar que el área es ¼ del área del primer cuadrado".

5. Se resuelve el nuevo problema de demostrar.

**5.- ¿ Qué números naturales pueden expresarse como diferencia de dos cuadrados perfectos ?**

Para comenzar , no tengo ni idea de " por donde pueden ir los tiros " por lo que directamente empiezo utilizando una herramienta heurística , **la consideración de una serie de casos** , para intentar intuir un proceso ( **solución** ) que me lleve al **resultado** del problema .Así :

1-0=1
4-1=3
9-4=5
16-9=7
25-16=9
36-25=11
49-36=13
64-49=15
81-64=17
100-81=19

Esta primera aproximación me hace pensar que la diferencia entre el n-ésimo cuadrado perfecto y el (n-1)-ésimo cuadrado perfecto es el (n-1)-ésimo número impar , hecho que puede comprobarse de la siguiente forma :$n^2-(n-1)^2 = n^2- n^2-1+2n =2n-1$ , que es el (n-1)-ésimo número impar .

Una vez comprobado esto , puedo pasar a **resolver un problema equivalente** que es " ¿ Que números naturales pueden expresarse como suma de números impares consecutivos ? " , ya que si $i>j$ $(n_i)^2-(n_j)^2= ((n_i)^2-(n_{i-1})^2\ ) + ((n_{i-1})^2-(n_{i-2})^2\ ) + ((n_{i-2})^2-(n_{i-3})^2\ )+\ldots+ ((n_{j+1})^2-(n_j)^2\ )$ y por tanto es la suma de números impares consecutivos .Por tanto me enfrento a un nuevo problema ( espero que más fácil de resolver que el anterior) , y si logro resolverlo tendré resuelto el original .

Para atacar este nuevo problema , vuelvo a **considerar unos cuantos casos particulares** , para que me den información sobre como buscar el correspondiente **resultado** .

Así aparece la siguiente tabla , que en cada columna muestra unos cuantos ejemplos de la suma de n números impares consecutivos:

| N=1 | N=2 | N=3 | N=4 | N=5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1+3 = 4 | 1+3+5=9 | 1+3+5+7=16 | 1+3+5+7+9=25 |
| 3 | 3+5 = 8 | 3+5+7=15 | 3+5+7+9=24 | 3+5+7+9+11=35 |
| 5 | 5+7 =12 | 5+7+9 = 21 | 5+7+9+11=32 | 5+7+9+11+13=45 |
| 7 | 7+9 =16 | 7+9+11=27 | 7+9+11+13=40 | 7+9+11+13+15=55 |
| 9 | 9+11=20 | 9+11+13=33 | 9+11+13+15=48 | 9+11+13+15+17=65 |
| 11 | 11+13 = 24 | 11+13+15=39 | 11+13+15+17=56 | 11+13+15+17+19=75 |
| 13 | 13+15=28 | 13+15+17=45 | 13+15+17+19=64 | 13+15+17+19+21=85 |

La información que proporciona esta tabla es abundante ; para comenzar , observando la primera columna se puede intuir que todo número impar se puede escribir como suma de impares consecutivos ( hecho que ya estaba claro ) . Por tanto ahora he de centrarme en los números pares , y en particular , cuales de estos números pueden escribirse como suma de impares consecutivos ( **divido el problema en** dos **partes** : por un lado , qué números impares puedo expresar como suma de impares consecutivos(todos) , y por otro, qué números pares se pueden expresar como suma de impares consecutivos ).

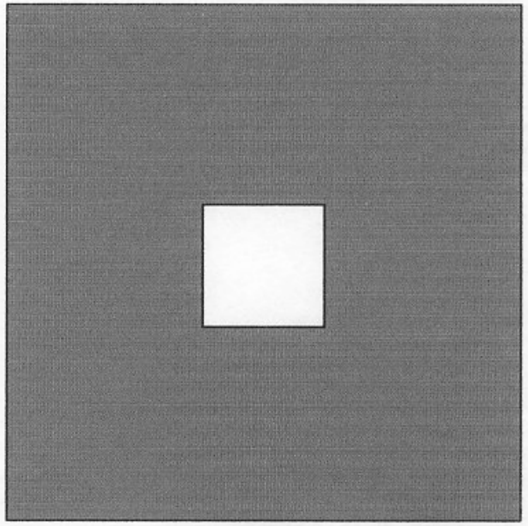
En lo siguiente que me fijo es en que en las columnas donde N es par , las sumas son números pares , mientras que en las columnas en las que N es impar , las sumas son números impares. Este también es un resultado conocido , que la suma de un número par de números impares es un número par y que la suma de un número impar de números impares es un número impar ( parece un trabalenguas ) .

Pero quizás , la información más valiosa para mí en el proceso de resolución del problema es que para un N fijo , la diferencia entre la suma conseguida en una fila y la conseguida en la fila anterior es N*2 . Como intento saber qué números pares puedo conseguir sumando impares consecutivos , y los números pares los encuentro en las columnas en las que N es un número par , me centro en el análisis de estas columnas. Si N es un número par , existe K un número natural tal que N=2*K ; entonces la diferencia entre dos filas consecutivas en estas columnas será 2*N = 2*2*K = 4*K . Esta propiedad junto a que la suma de los primeros N números impares es un múltiplo de cuatro (si N es par) son las causantes de que mi **conjetura** sobre el **resultado** del subproblema sea que los números pares que se pueden escribir como suma de números impares consecutivos son los múltiplos de cuatro , ya que la suma de los primeros N números impares es un múltiplo de cuatro y para pasar de una fila a la siguiente dentro de la misma columna hemos de sumar 4*K .

Para concluir , debo demostrar que se cumple que la suma de los N primeros números impares es múltiplo de cuatro si N es par y que la diferencia entre la suma conseguida en una fila y la conseguida en la fila anterior es N*2 , para N fijo ( 4*K si N es un número par ). Para ello ,voy a utilizar la fórmula de la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética , ya que los números impares forman una progresión aritmética de diferencia dos . Luego si N es par , existe K tal que N = 2*K y la suma de los N primeros números impares $1 + 3 + 5 +..+ (2*N-1) = ((1 + (2*N-1))*N)/2 = (2*N^2)/2 = N^2 = (2*K)^2 = 4*K^2$ y por tanto múltiplo de cuatro , con lo que queda probada la primera afirmación . Sean ahora $a_1, a_2, a_3, a_N,\ldots$ números impares consecutivos donde $a_1 = 2 * n_1 - 1$; su suma es $((a_1 + a_N) * N)/2$ . La suma de la siguiente fila en la tabla es $a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_N + a_{N+1} = a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_N + a_{N+1} - a_1 = ((a_1 + a_N) * N)/2 + 2 * (n_1 + N) - 1 - (2 * n_1 - 1) = ((a_1 + a_N) * N)/2 + 2*N$ , es decir la suma de la fila anterior más 2*N , como queríamos demostrar . También tendré que demostrar el recíproco , es decir , que si el número P es un múltiplo de cuatro , lo puedo expresar como la suma de un número par de números impares. Suponiendo que existe K tal que P=4*K , entonces 2*K - 1 y 2*K +1 son dos números impares consecutivos y $2*K - 1 + 2*K +1 = 4*K = P$ , por lo que queda probado.

Con esto último puedo finalizar afirmando que el **resultado** del problema (los números que se pueden expresar como suma de números impares consecutivos ) son los números impares y los múltiplos de cuatro o equivalentemente los números naturales que pueden expresarse como diferencia de dos cuadrados perfectos son los números impares y los números que son múltiplos de cuatro .

Un problema en cuya **solución** podría utilizar el **resultado** del problema que acabo de analizar sería si se quiere construir recintos de la siguiente forma



y quisiésemos saber qué áreas podemos conseguir.

Resumiendo , tenía un problema y mediante la observación de casos particulares he conjeturado que el problema inicial era equivalente a otro , se podía reformular en otro en apariencia más sencillo . Tras probar que la conjetura era cierta , he tratado de encontrar el resultado del nuevo problema observando de nuevo casos particulares y he decidido dividir el problema en dos partes, una de las cuales resulta obvia . Para resolver la otra parte , continuo observando los casos particulares y realizo mi conjetura; para probarla considero un caso genérico y demuestro que cumple la hipótesis , por lo que el razonamiento es válido para todos los casos .Por último , extiendo el problema buscando una posible aplicación en el ámbito de las áreas .

*Problema:*

Escriu els nombres naturals començant per l'1 . Començant pel tercer, titlla-los de tres en tres. Escriu les sumes aculmul.lades dels que queden . Així:

1,2,3,4,5,6,7,8,9,...

1,2, ,4,5, ,7,8,...

1,3, ,7,12, ,19,27,..

Començant pel segon , titlla-los de dos en dos. Escriu les sumes acumul.lades dels que queden. Quins nombres són?.

Com procedim a l'atac del problema? , el primer que cal fer és comprendre el problema , localitzar la incògnita i el procés que ens durà fins a ella, després caldrà composar un plà d'acció , dur-lo a terme i una vegada assolit l'èxit entrarem en la fase de revisió extensió del problema.

Comencem per la localització de la incògnita, quina és? . El que ens pregunten és quins nombres ens queden? . Açò , pot fer-nos pensar que els nombres resultants tenen alguna característica comuna o alguns trets distintius que els caracteritzen. Aquesta és una destresa heurística que rep el nom de **raonament plausible**, i que no és més que el deduir de les dades que tenim o dels indicis, alguna cosa que pot ajudarnos a arribar amb éxit a la resolució del problema, no sempre té perque funcionar bé.

El nostre pla, consisteix doncs en realitzar el procés descrit en l'enunciat del problema i intentar trobar una pauta comuna entre els nombres resultants. D'aquesta forma el que farem serà anar del que volem al que sabem.(destresa heurística que correspon al plantejament , suposem que tenim el problema resolt...)

Comencem doncs per prolongar un poc més la successió que s'ens presenta en l'enunciat del problema i estudiar el resultat sobre aquesta mostra , prenim , per exemple els 30 primers naturals, i realitzem el procés: (Aquesta és també una ferramenta heurística que consisteix en prendre un cas particular, en aquest cas un subconjunt relativament menut dels nombres naturals, per a estudiar el problema sobre aquest subconjunt i intentar extraure d'aquesta colecció de nombres una resolució per al problema original que correspon a tots els naturals.)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

1 2 ~~3~~ 4 5 ~~6~~ 7 8 9 10 11 ~~12~~ 13 14 ~~15~~

1 ~~3~~ 7 ~~12~~ 19 ~~27~~ 37 ~~48~~ 61 ~~75~~

1 8 27 64 125

16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

16 17 ~~18~~ 19 20 ~~21~~ 22 23 ~~24~~ 25 26 ~~27~~ 28 29 ~~30~~

91 ~~108~~ 127 ~~147~~ 169 ~~192~~ 217 ~~243~~ 271 ~~300~~

216 343 512 729 1000

Ens queda doncs la successió, 1,8,27,64,125,216,343,512,729,1000 que podem escriure com $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3$ .

Pel que hem vist fins ara sembla que els nombres que ens resulten són els cubs dels nombres naturals (Aquesta és una altra destressa heurística que consisteix en l'establiment de conjectures, després de l'observació de les dades )

Si provem aquesta conjectura tindrem resolt el problema .(Aquesta és una ferramenta heurística la transformació del problema i que consisteix en transformar un problema de trobar, en aquest cas trobar un tipus de nombres, en un problema de provar, provar la nostra conjectura.) .

Anem doncs a intentar provar aquesta conjectura.

# GENERAR PROBLEMAS

## ¿QUÉ PASARÍA SI…?

La sucesión de Fibonacci está definida por la fórmula de recurrencia de segundo orden $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ y la sucesión canónica es la que comienza por dos unos:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55…

La sucesión de las razones de términos consecutivos es interesante:

| | | |
|---|---|---|
| 1/1 | = | 1’000 |
| 1/2 | = | 0’500 |
| 2/3 | = | 0’667 |
| 3/5 | = | 0’600 |
| 5/8 | = | 0’625 |
| 8/13 | = | 0’615 |
| 13/21 | = | 0’619 |
| 21/34 | = | 0’618 |
| 34/55 | = | 0’618 |

porque converge a $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Ésta es una primera propiedad interesante, llamémosla propiedad 1.

Propiedad 2: La diferencia entre dos términos consecutivos genera otra sucesión de Fibonacci, cuyos primeros términos son 0 y 1.

Propiedad 3: El cuadrado de cualquier término difiere en una unidad del producto de los términos entre los que está comprendido:

$$\left| f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} \right| = 1$$

Propiedad 4: El producto de dos términos adyacentes difiere en una unidad del producto de los términos que les preceden y anteceden inmediatamente:

$$\left| f_{n-1} \cdot f_n - f_{n-2} \cdot f_{n+1} \right| = 1$$

Para preguntar ¿Qué pasaría si…? de forma sistemática necesitamos una lista de atributos de la sucesión de Fibonacci.

Una lista puede ser:

i) Comienza con dos números dados.

ii) Los dos números dados son iguales.

iii) Los dos números dados son el 1.

iv) Haciendo algo con dos números consecutivos se obtiene el siguiente.

v) Ese algo es una operación aritmética.

vi) La operación es la adición.

Atacamos ii)
¿Qué pasaría si los dos números dados no fueran iguales?
Por ejemplo, 10 y 7.
Entonces la sucesión sería:

10, 7, 17, 24, 41, 65, 106, 171…

¿Qué cambia?

Propiedad 1

¿A qué límite tiende la razón de términos consecutivos (si es que tiende a alguno)?

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Propiedad 2

¿Qué sucesión se genera al hallar las diferencias de términos consecutivos?

-3, 10, 7, 17, 24, 41, 65, 106, 171…

Propiedad 3

¿Qué relación hay entre el cuadrado de un término y el producto de sus vecinos?

La diferencia no es 1, sino 121 ($10 \times 17 - 7^2 = 170 - 49$), pero siempre es 121.

¿Por qué cambia lo que cambia y por qué no cambia lo que no cambia?

Propiedad 4

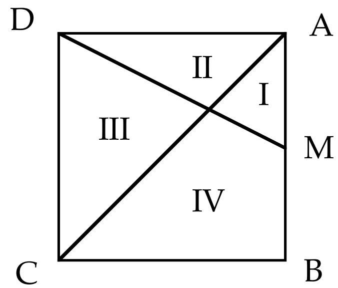
¿Qué relación hay entre el producto de dos términos consecutivos y el de los que les preceden y siguen inmediatamente?

De nuevo la diferencia no es 1, sino 121 (7×17–119, 10×24–240, 240–119), y siempre es 121.

De nuevo,

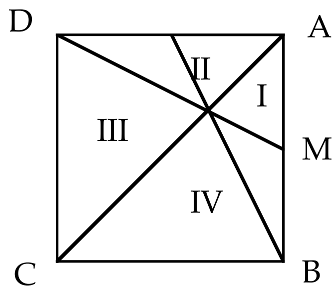
¿por qué cambia lo que cambia y por qué no cambia lo que no cambia?

Dado el cuadrado ABCD, con M el punto medio de AB. ¿Cuáles son las razones de las áreas de las cuatro regiones del cuadrado definidas por la diagonal AC y DM?

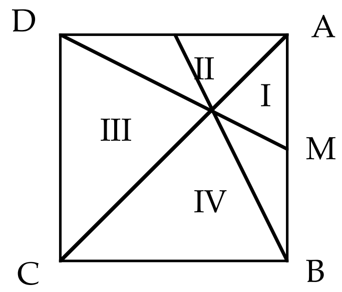



Los triángulos I y III son semejantes, y la razón entre los lados DC y AM es 2, así que el área de III es 4 veces el área de I.

Para hallar la razón entre las áreas de los triángulos I y II, un buen comienzo es considerar que AC es un eje de simetría del cuadrado y reflejar en él el segmento DM.




El triángulo II queda así dividido en dos triángulos, uno simétrico del I y otro que tiene la misma área por tener la misma altura y la misma base (la mitad del lado del cuadrado). El área de II es 2 veces el área de I.

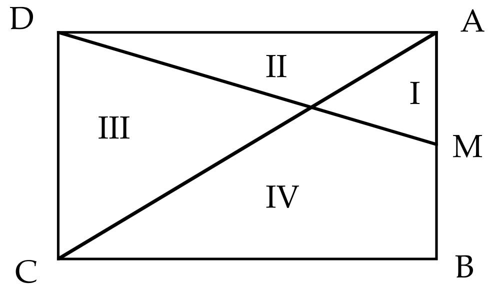



La razón del área del triángulo IV con la del I se puede obtener ahora ya que AC divide el cuadrado en dos partes iguales, así que $A_I+A_{IV}=A_{II}+A_{III}$.

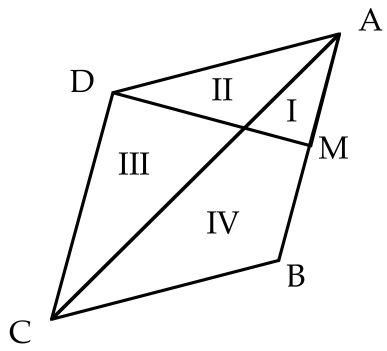
Entonces, $A_I+A_{IV}=2A_I+4A_I$; $A_{IV}=5A_I$. Con lo que obtenemos que las áreas de los triángulos I, II, III y IV están en las razones 1:2:4:5.

¿Qué pasaría si...? aplicado a esta situación en la fase de revisión-extensión conduce naturalmente a modificar la figura, uno de los atributos de la situación, y lo más natural es usar las familias de cuadriláteros a las que el cuadrado pertenece:

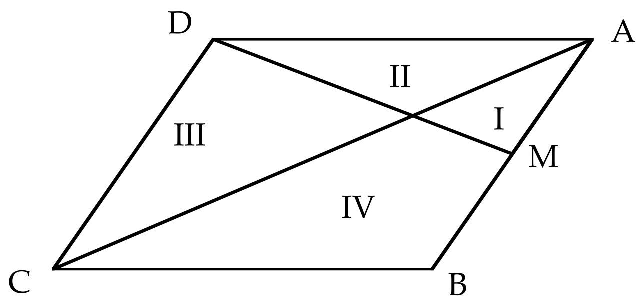
¿Cuáles serían las razones si las figuras fueran rectángulos de lados m y n?



¿Cuáles serían las razones si las figuras fueran rombos de diagonales m y n?

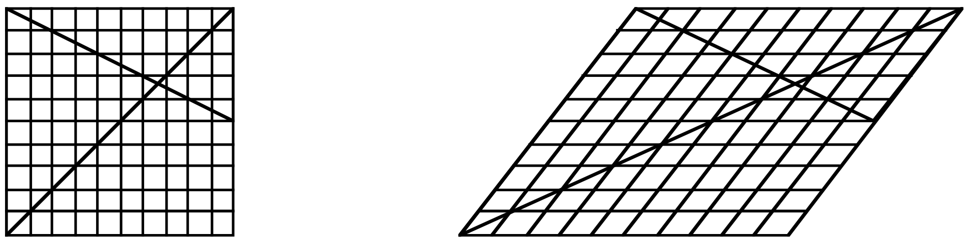



¿Cuáles serían las razones si las figuras fueran paralelogramos de lados m y n?



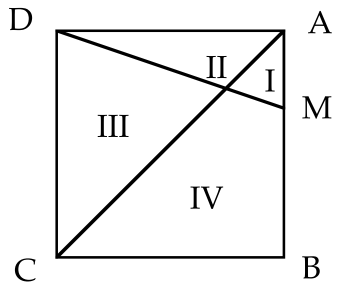
La solución anterior sólo puede usarse en parte para obtener la de estos nuevos problemas, porque no siempre se mantienen las propiedades que se han usado. (El cuadrado no funciona por tanto como un caso genérico.) Pero una vez se resuelven esos problemas, se obtiene que las razones entre las áreas siguen siendo las mismas. Este es un hecho que tiene que sorprender y que naturalmente ha de conducir a querer ver qué es lo que hace que no varíe.

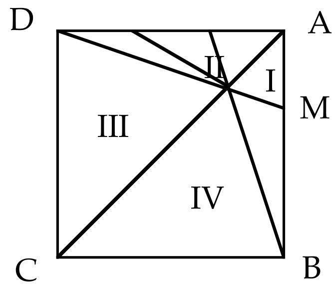
Dicho de otra manera, uno desearía tener una solución que fuera común para todos los problemas. La figura siguiente sugiere tal solución, obtenida sencillamente aplicando la idea de que el cuadrado es un caso límite y transformando el problema en probar que al pasar de una figura a otra el área no varía (cosa que aquí conseguimos por el intermedio de cambiar la unidad de área).



¿Qué pasaría si…?

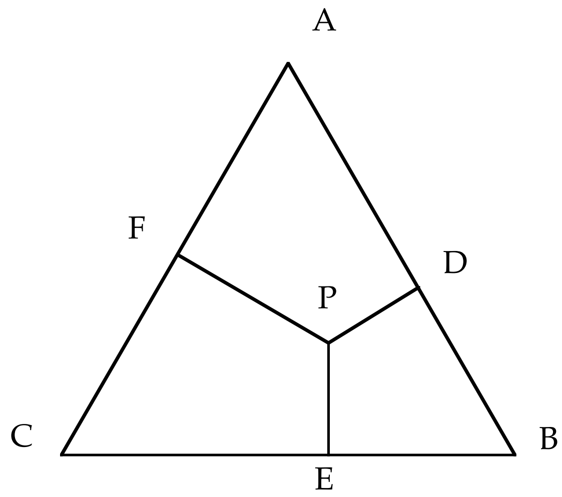
¿Cuáles serían las razones si M fuera un punto de trisección, por ejemplo AB=3AM? (Respuesta: 1:3:9:11; pero lo interesante es ¿Qué puedo hacer con la solución anterior para resolver este problema?)




¿Cuáles serían las razones si M divide a AB en dos segmentos la razón de cuyas longitudes es r:(1-r), con $0<r<1$? (Respuesta: $1:x:x^2:(x^2+x-1)$, con $x=1/r$); de nuevo, ¿Qué puedo…?)

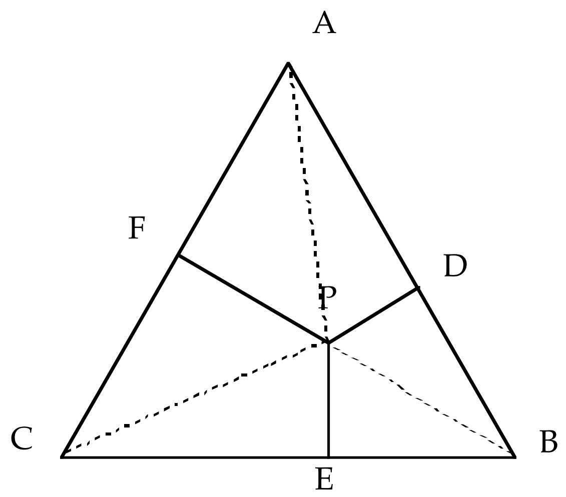
Dado un triángulo equilátero ABC y un punto P en su interior, ¿cuál es la suma de las distancias de P a los tres lados?




Con la notación de la figura el problema se puede enunciar así:

Encontrar PD+PE+PF.

La figura está muy desnuda, pero el hecho de que sean distancias sugiere que las tomemos como alturas de los triángulos PAB, PBC y PCA.




Las alturas de triángulos aparecen en la fórmula del área, así que parece prometedor sumar las áreas de esos triángulos, que resulta el área del triángulo ABC:

área PAB + área PBC + área PCA = área ABC

Pero como todos esos triángulos tienen la misma base (el lado del triángulo ABC, llamémosle a), resulta:

$$\frac{a(PD)}{2}+\frac{a(PE)}{2}+\frac{a(PF)}{2}=\frac{a(h)}{2}$$

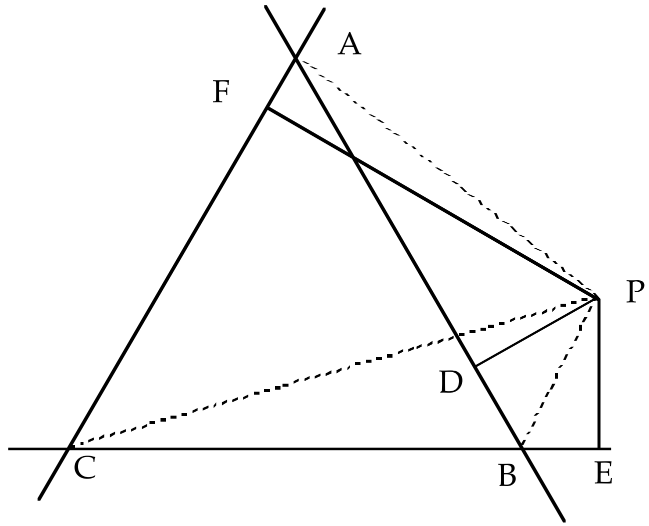
Así que

PD+PE+PF=h.

La solución no usa ninguna propiedad particular de la posición del punto, excepto el hecho de que es un punto interior, así que

¿Qué pasaría si… el punto no fuera interior?

Si resolvemos una de las posiciones posibles usando una adaptación de la solución anterior, obtenemos PF+PE-PD=h.




Lo que permite conjeturar que según la posición el resultado es que una combinación determinada de adiciones y substracciones da la altura del triángulo.

¿Qué pasaría si…? puede continuar con:

¿Qué pasaría si ABC no es equilátero?

¿Qué pasaría si no es un triángulo sino un polígono?

¿Qué pasaría si en vez de ser una figura plana fuera tridimensional?

¿Qué pasaría si las distancias fueran a los vértices en vez de a los lados?

¿Qué pasaría si los segmentos no fueran perpendiculares, sino que todos hicieran un ángulo determinado con los lados?